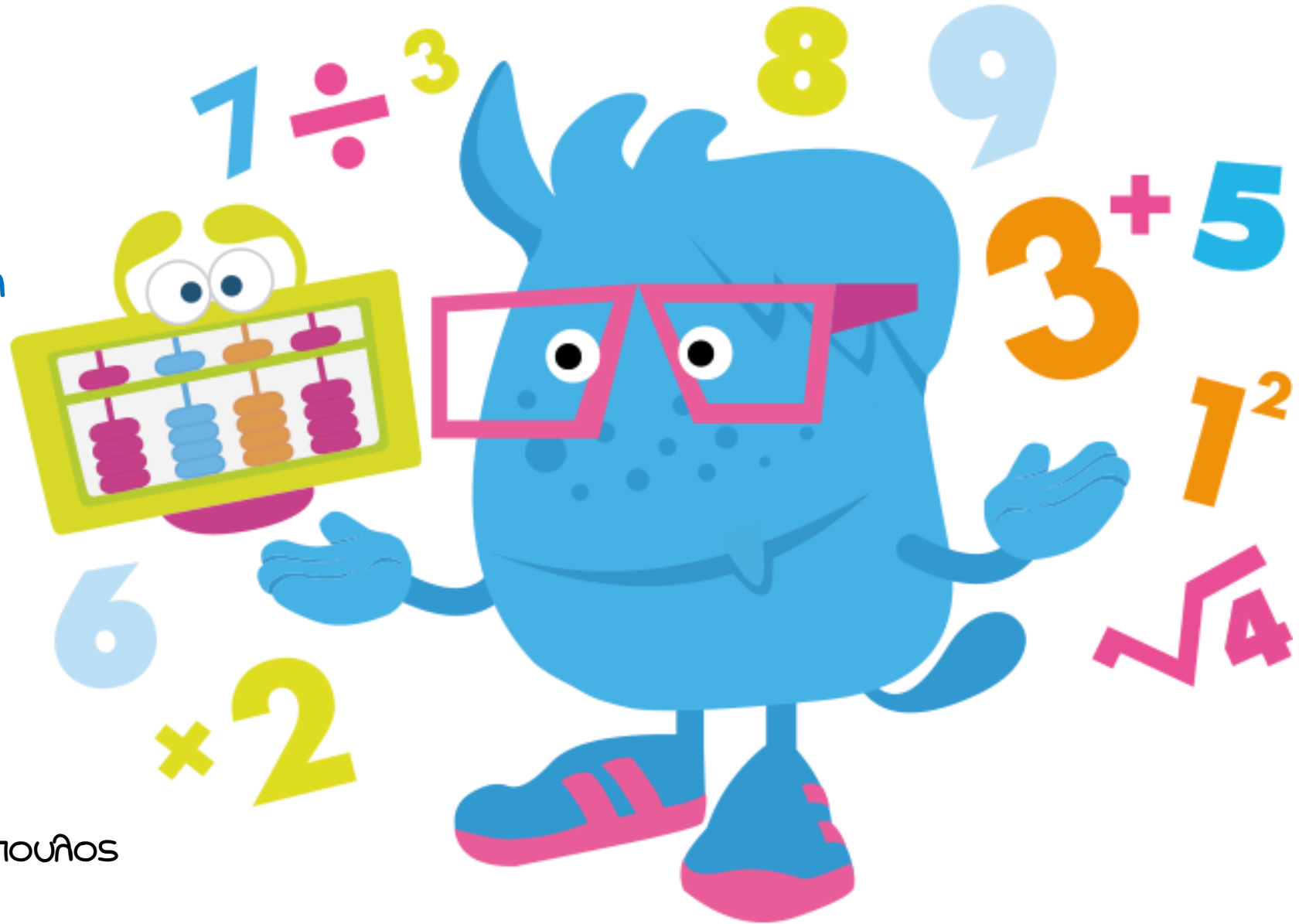


Μαθηματικά Ε' τάξης

Λύσεις
ασκήσεων
Βιβλίου μαθητή
και Τετραδίου
εργασιών



Αποστόλης Αγγελόπουλος

18. Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων



Διερεύνηση

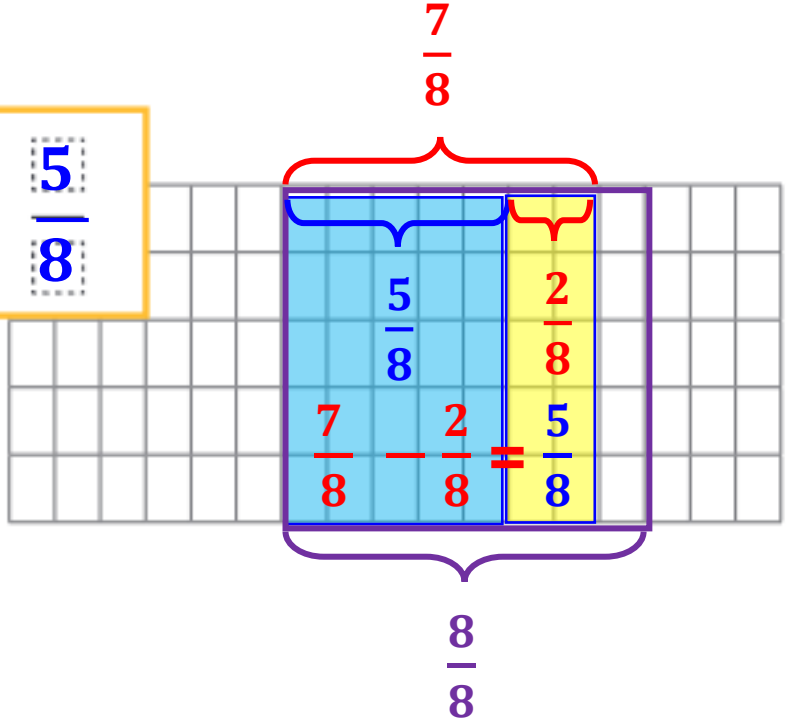
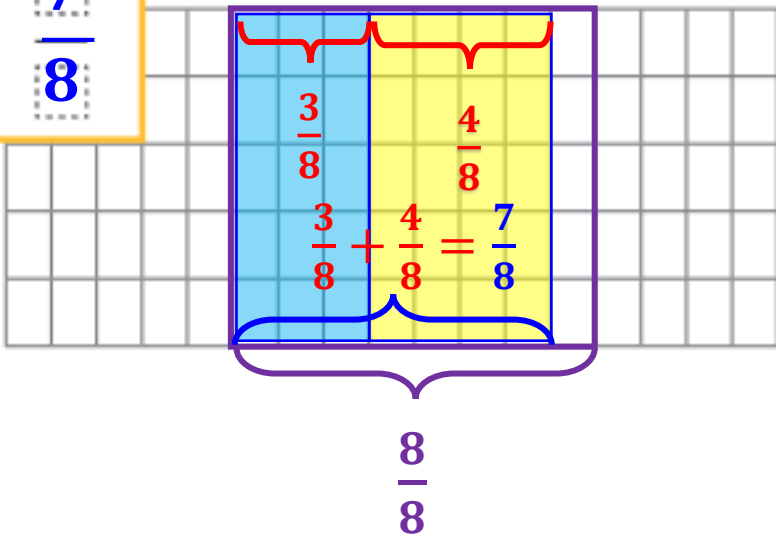
1. Χρησιμοποιούμε το τετραγωνισμένο χαρτί, για να αναπαραστήσουμε με ράβδους ή ορθογώνια τα κλάσματα και να υπολογίσουμε τα αθροίσματα και τις διαφορές:

α. $\frac{3}{8} + \frac{4}{8}$

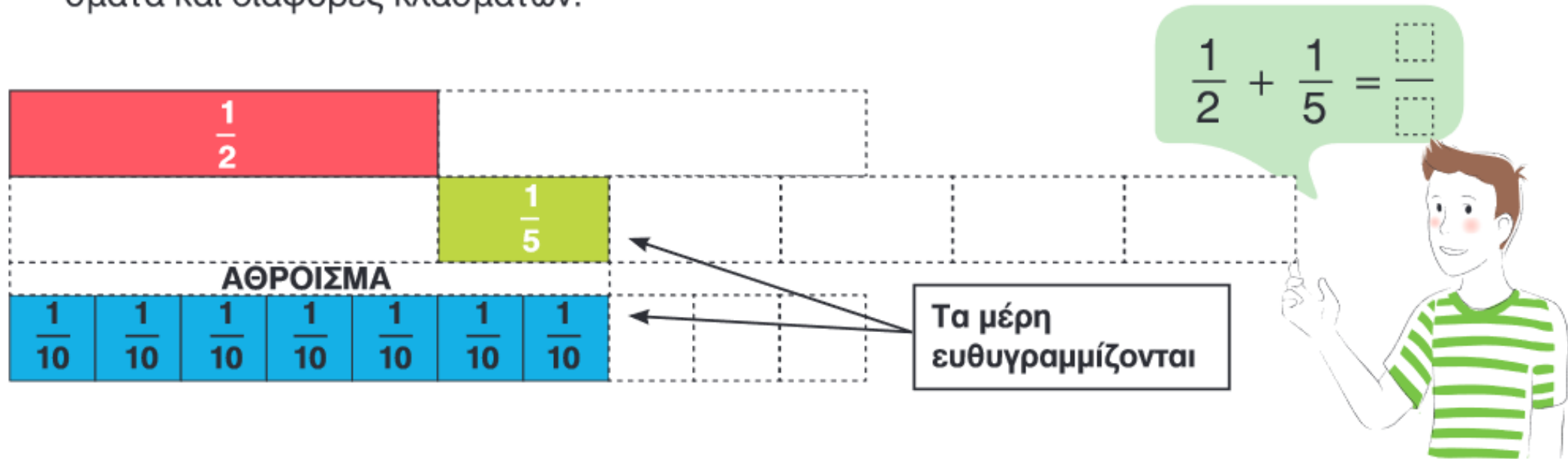
β. $\frac{7}{8} - \frac{2}{8}$

$\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$

$\frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$



2. Χρησιμοποιούμε ράβδους κλασμάτων, για να αναπαραστήσουμε και να υπολογίσουμε αθροίσματα και διαφορές κλασμάτων.



- α. Εξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε ο Νίκος και έπειτα συμπληρώνουμε το άθροισμα.

Ο Νίκος διαπίστωσε ότι μία ράβδος $\frac{1}{2}$ είναι ίση με 5 ράβδους $\frac{1}{10}$ και έτσι συμπέρανε ότι $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$.

Επίσης διαπίστωσε ότι μία ράβδος $\frac{1}{5}$ είναι ίση με 2 ράβδους $\frac{1}{10}$ και έτσι συμπέρανε ότι $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$.

Έτσι, υπολόγισε ότι $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$

β. Θα μπορούσε ο Νίκος, αντί για τις ράβδους $\frac{1}{10}$, να χρησιμοποιήσει τις ράβδους $\frac{1}{8}$;

Εξηγούμε:

Δε θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει ράβδους $\frac{1}{8}$ διότι η ράβδος $\frac{1}{5}$ δε θα ευθυγραμμιζόταν με τις ράβδους $\frac{1}{8}$.

Τα κλάσματα $\frac{1}{8}$ και $\frac{1}{5}$ δεν είναι ισοδύναμα.

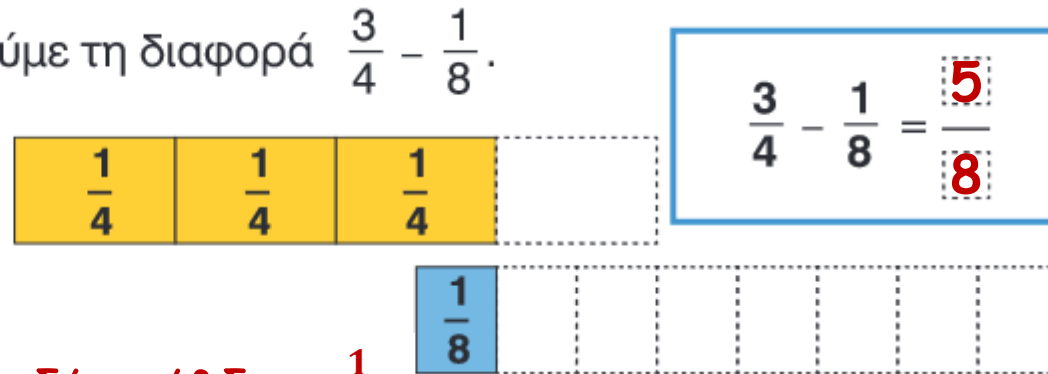
γ. Χρησιμοποιούμε τις ράβδους για να βρούμε τη διαφορά $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$.
Εξηγούμε τον τρόπο εργασίας μας.

Παρατηρούμε ότι η ράβδος $\frac{1}{8}$ είναι η μισή της ράβδου $\frac{1}{4}$,

επομένως κάθε ράβδος $\frac{1}{4}$ είναι ίση με δύο ράβδους $\frac{1}{8}$.

Έτσι έχουμε: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ και $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Επομένως η διαφορά μπορεί να γίνει: $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.



ΔΙΑΦΟΡΑ

δ. Ποιες άλλες ράβδους θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για να αναπαραστήσουμε τη διαφορά;

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ράβδους που ο αριθμητής τους να είναι 1, αλλά ο παρονομαστής τους να είναι πολλαπλάσιο του 8:

$$\frac{1}{16}, \frac{1}{24}, \frac{1}{32} \text{ κ.α.}$$



Συζητάμε με ποιον τρόπο προσθέτουμε και αφαιρούμε κλάσματα με ίδιους (ομώνυμα) και με διαφορετικούς (ετερώνυμα) παρονομαστές.

Πρόσθεση και αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων:

- Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα, προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους αριθμητές τους, ενώ παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο.

Πρόσθεση και αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων:

- Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ετερώνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα, έπειτα προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους αριθμητές, ενώ ως παρονομαστή βάζουμε τον ίδιο.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Τα κλάσματα που έχουν ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα**, ενώ τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή λέγονται **ετερώνυμα**.

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε **ετερώνυμα κλάσματα** τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και στη συνέχεια προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους αριθμητές, ενώ παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο.

Στο τέλος, κάνουμε απλοποίηση.

Παραδείγματα

$$\frac{2}{5}, \frac{7}{5}$$

ομώνυμα

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{9}{4}$$

ετερώνυμα

$$\bullet \frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 2}{6 \times 2} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\bullet \frac{4}{3} - \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3 \times 5} - \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{20}{15} - \frac{9}{15} = \frac{11}{15}$$



Εφαρμογή

1. Να βρείτε το άθροισμα: $6\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2}$

α' τρόπος: Μετατρέπουμε τους μεικτούς αριθμούς σε κλάσματα.

$$6\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} = \frac{27}{4} + \frac{5}{2} = \frac{27}{4} + \frac{10}{4} = \frac{37}{4} = 9\frac{1}{4}$$

β' τρόπος: Προσθέτουμε χωριστά τις ακέραιες μονάδες από τα κλάσματα.

$$6\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} = 8 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 8 + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = 8 + \frac{5}{4} = 8 + 1 + \frac{1}{4} = 9\frac{1}{4}$$

Σε κάθε περίπτωση, στο τέλος, μετατρέπουμε πάλι σε μεικτό αριθμό και, αν γίνεται, κάνουμε και απλοποίηση.

2. Με τη βοήθεια του μοντέλου , να κάνετε την παρακάτω

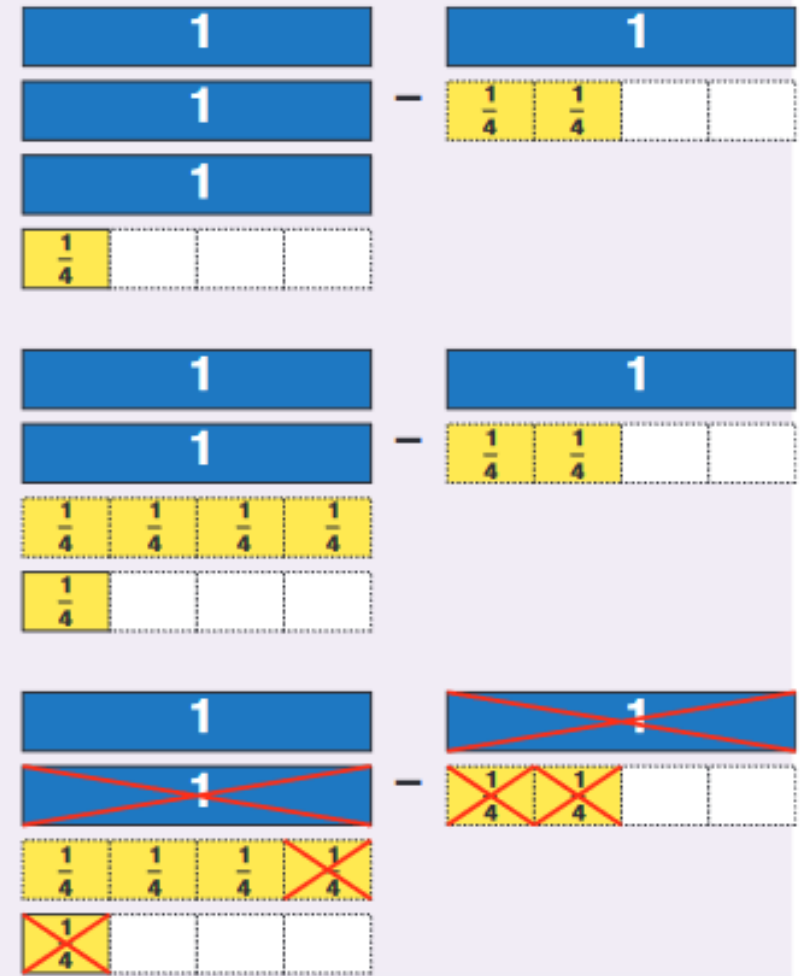
$$\text{αφαίρεση: } 3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{4}$$

Επειδή από το $\frac{1}{4}$ του μειωτέου δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε τα $\frac{2}{4}$ του αφαιρετέου μετατρέπουμε τη 1 ακέραιη μονάδα του μειωτέου σε $\frac{4}{4}$, οπότε αυτός γίνεται: $3\frac{1}{4} = 2\frac{5}{4}$.

$$\text{Έτσι η αφαίρεση γίνεται: } 2\frac{5}{4} - 1\frac{2}{4} = 1\frac{3}{4}$$

Περιγράφουμε τη διαδικασία:.....

Αφαιρούμε πρώτα το ακέραιο μέρος των μικτών ($2-1=1$) και στη συνέχεια το κλασματικό ($\frac{5}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$)





Αναστοχασμός

1. Επιλέγουμε δύο κλάσματα των οποίων η διαφορά είναι $\frac{1}{4}$ και ο παρονομαστής τους είναι διαφορετικός από το 4.

$$\text{π.χ } \frac{7}{12} \text{ και } \frac{1}{3}, \text{ καθώς } \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12} - \frac{4}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

2. Πώς θα μπορούσε να μας βοηθήσει το Ε.Κ.Π. στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων;

Το Ε.Κ.Π. μας βοηθάει στην πρόσθεση και την αφαίρεση ετερόνομων κλασμάτων, καθώς μπορούμε να μετατρέψουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα με παρονομαστή το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

3. Γιατί στην πρόσθεση πρέπει να μετατρέπουμε τα ετερόνομα κλάσματα σε ομώνυμα;

Στην πρόσθεση και στην αφαίρεση πρέπει να μετατρέπουμε τα ετερόνομα κλάσματα σε ομώνυμα, για να έχουμε μέρη ίδιου μεγέθους. (Δεν μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε διαφορετικά πράγματα.)

1η Άσκηση

Να συμπληρώσεις τα κενά:

Ε.Κ.Π (2,3)=6

$$\alpha. \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{6}} = 1$$

Ε.Κ.Π (8,4)=8

$$\beta. \frac{\boxed{10}}{8} + \frac{\boxed{1}}{4} = 1\frac{1}{2}$$

Ε.Κ.Π (2,6)=6

$$\gamma. 1\frac{1}{2} - \frac{4}{6} = \frac{\boxed{5}}{6}$$

Ε.Κ.Π (5,10)=10

$$\delta. \frac{11}{5} - \frac{\boxed{10}}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\alpha. \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\beta. \frac{\dots}{8} + \frac{\dots}{4} = 1\frac{1}{2} \rightarrow \frac{\dots}{8} + \frac{\dots}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{\dots}{8} + \frac{\dots}{4} = \frac{3 \times 4}{2 \times 4} \rightarrow \frac{\dots}{8} + \frac{\dots}{4} = \frac{12}{8} \rightarrow \frac{10}{8} + \frac{2}{8} = \frac{12}{8} = 1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2}$$

$$\gamma. 1\frac{1}{2} - \frac{4}{6} = \frac{\dots}{6} \rightarrow \frac{3}{2} - \frac{4}{6} = \frac{\dots}{6} \rightarrow \frac{3 \times 3}{2 \times 3} - \frac{4}{6} = \frac{\dots}{6} \rightarrow \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\delta. \frac{11}{5} - \frac{\dots}{10} = \frac{6}{5} \rightarrow \frac{11 \times 2}{5 \times 2} - \frac{\dots}{10} = \frac{6 \times 2}{5 \times 2} \rightarrow \frac{22}{10} - \frac{10}{10} = \frac{12}{10}$$

2η Άσκηση

Εργασιών

Να εκτιμήσεις τα παρακάτω αθροίσματα και τις διαφορές και να βάλεις ένα από τα σύμβολα $>$, $<$ ή $=$, όπως στο παράδειγμα:

$$\bullet \frac{5}{8} - \frac{3}{8} \text{ (} < \text{)} 1$$

$$\bullet \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \text{ (} < \text{)} 1$$

$$\bullet \frac{8}{5} - \frac{1}{10} \text{ (} > \text{)} 1$$

$$\bullet \frac{8}{9} + \frac{2}{3} \text{ (} > \text{)} 1$$

$$\bullet 2\frac{3}{5} - 1\frac{2}{6} \text{ (} > \text{)} 1$$

$$\bullet 2\frac{5}{6} - 1\frac{7}{8} \text{ (} \text{) } 1$$

$$\bullet \frac{12}{5} + \frac{14}{15} \text{ (} \text{) } 1$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}, \text{ άρα } \frac{1}{6} + \frac{2}{3} < 1.$$

$$\frac{8}{5} - \frac{1}{10} = \frac{8 \times 2}{5 \times 2} - \frac{1}{10} = \frac{16}{10} - \frac{1}{10} = \frac{15}{10}, \text{ άρα } \frac{8}{5} - \frac{1}{10} > 1.$$

$$\frac{8}{9} + \frac{2}{3} = \frac{8}{9} + \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{8}{9} + \frac{6}{9} = \frac{14}{9}, \text{ άρα } \frac{8}{9} + \frac{2}{3} > 1.$$

$$2\frac{3}{5} - 1\frac{2}{6} = \frac{13}{5} - \frac{8}{6} = \frac{13 \times 6}{5 \times 6} - \frac{8 \times 5}{6 \times 5} = \frac{78}{30} - \frac{40}{30} = \frac{38}{30}, \text{ άρα } 2\frac{3}{5} - 1\frac{2}{6} > 1.$$

2η Άσκηση

Εργασιών

Να εκτιμήσεις τα παρακάτω αθροίσματα και τις διαφορές και να βάλεις ένα από τα σύμβολα $>$, $<$ ή $=$, όπως στο παράδειγμα:

$$\bullet \frac{5}{8} - \frac{3}{8} \text{ (} < \text{)} 1$$

$$\bullet \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \text{ (} < \text{)} 1$$

$$\bullet \frac{8}{5} - \frac{1}{10} \text{ (} > \text{)} 1$$

$$\bullet \frac{8}{9} + \frac{2}{3} \text{ (} > \text{)} 1$$

$$\bullet 2\frac{3}{5} - 1\frac{2}{6} \text{ (} > \text{)} 1$$

$$\bullet 2\frac{5}{6} - 1\frac{7}{8} \text{ (} < \text{)} 1$$

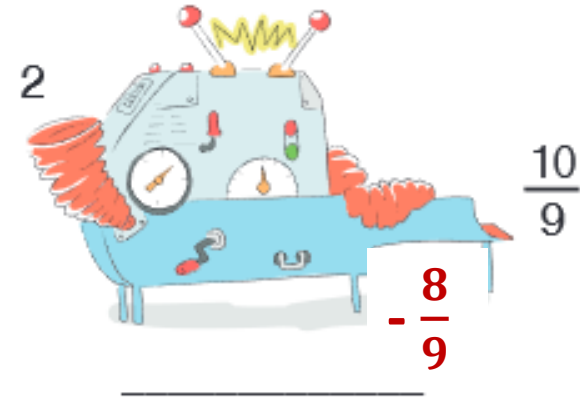
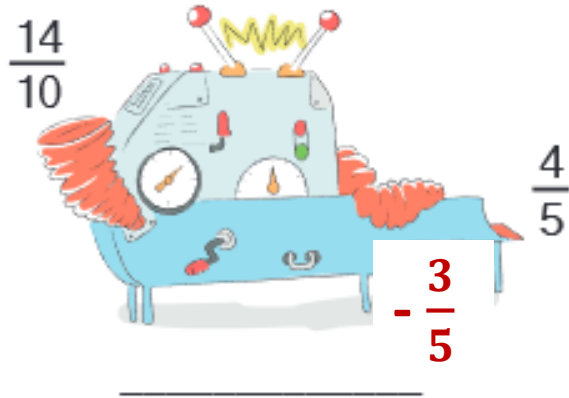
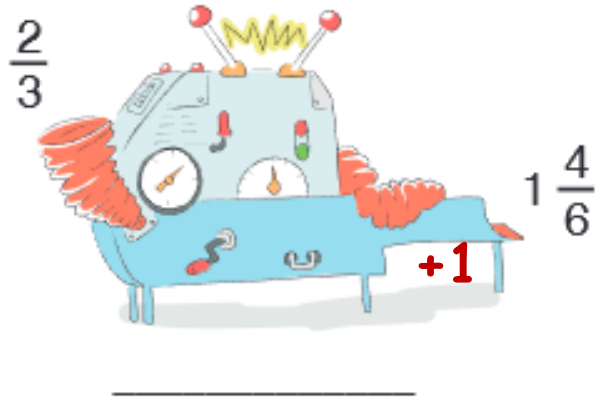
$$\bullet \frac{12}{5} + \frac{14}{15} \text{ (} > \text{)} 1$$

$$2\frac{5}{6} - 1\frac{7}{8} = \frac{17}{6} - \frac{15}{8} = \frac{17 \times 4}{6 \times 4} - \frac{15 \times 3}{8 \times 3} = \frac{68}{24} - \frac{45}{24} = \frac{23}{24}, \text{ άρα } 2\frac{5}{6} - 1\frac{7}{8} < 1.$$

$$\frac{12}{5} + \frac{14}{15} = \frac{12 \times 3}{5 \times 3} + \frac{14}{15} = \frac{36}{15} + \frac{14}{15} = \frac{50}{15}, \text{ άρα } \frac{12}{5} + \frac{14}{15} > 1.$$

3η Άσκηση

Να παρατηρήσεις τις μηχανές πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων. Να γράψεις κάτω από καθεμία τον αριθμό που προστίθεται ή αφαιρείται κάθε φορά.



- Στην 1η μηχανή παρατηρούμε ότι ο αριθμός που εξάγεται είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό που εισάγεται, επομένως γίνεται πρόσθεση. Για να βρούμε τον αριθμό που προστίθεται κάνουμε

την αφαίρεση: $1\frac{4}{6} - \frac{2}{3} = \frac{10}{6} - \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{10}{6} - \frac{4}{6} = \frac{6}{6} = 1$

- Στη 2η μηχανή ο αριθμός που εξάγεται είναι μικρότερος από τον αριθμό που εισάγεται, επομένως γίνεται αφαίρεση. Για να βρούμε τον αριθμό που αφαιρείται κάνουμε την αφαίρεση:

$$\frac{14}{10} - \frac{4}{5} = \frac{14:2}{10:2} - \frac{4}{5} = \frac{7}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

- Στην 3η μηχανή ο αριθμός που εξάγεται από αυτή είναι μικρότερος από τον αριθμό που εισάγεται, επομένως γίνεται αφαίρεση. Για να βρούμε τον αριθμό που αφαιρείται κάνουμε την

αφαίρεση: $2 - \frac{10}{9} = \frac{2}{1} - \frac{10}{9} = \frac{2 \times 9}{1 \times 9} - \frac{10}{9} = \frac{18}{9} - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$

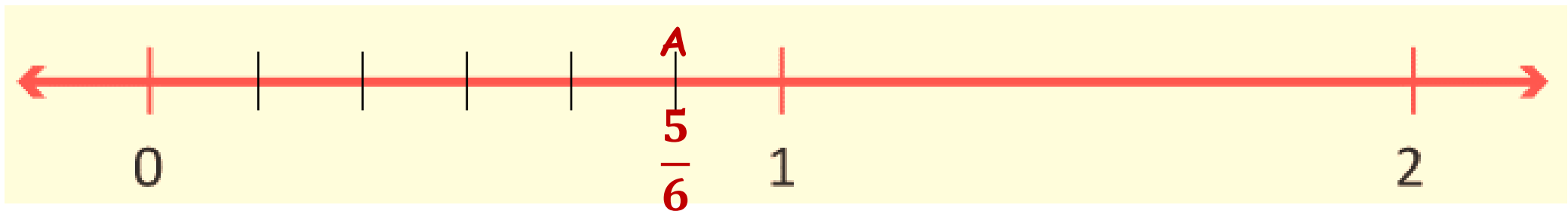
4η Άσκηση

Να σημειώσεις πάνω στην αριθμογραμμή το σημείο A, αν $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = A$.



Υπολογίζουμε το άθροισμα: $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Εφόσον ο αριθμός A είναι μικρότερος από το 1, χωρίζουμε το διάστημα από το 0 έως το 1 σε έξι ίσα μέρη.



1ο Πρόβλημα

Να βρεις την περίμετρο ενός ορθογωνίου, αν γνωρίζεις ότι η μεγάλη του πλευρά έχει μήκος $\frac{4}{5}$ μ. και η μικρή του πλευρά είναι μικρότερη κατά $\frac{1}{4}$ μ. από τη μεγάλη.

$$\text{Πλευρά } \alpha = \frac{4}{5} \text{ μ.}$$

$$\text{Πλευρά } \beta = \frac{4}{5} - \frac{1}{4} = \frac{4 \times 4}{5 \times 4} - \frac{1 \times 5}{4 \times 5} = \frac{16}{20} - \frac{5}{20} = \frac{11}{20} \text{ μ.}$$

$$\text{Ε.Κ.Π. } (5, 20) = 20$$

$$\begin{aligned} \text{Π}_{\text{ορθογωνίου}} &= \alpha + \beta + \alpha + \beta = \frac{4}{5} + \frac{11}{20} + \frac{4}{5} + \frac{11}{20} = \frac{4 \times 4}{5 \times 4} + \frac{11}{20} + \frac{4 \times 4}{5 \times 4} + \frac{11}{20} = \frac{16}{20} + \frac{11}{20} + \frac{16}{20} + \frac{11}{20} = \frac{54}{20} = 2 \frac{14}{20} \text{ μ.} \\ &= 2 \frac{7}{10} \text{ μ.} \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{11}{20} \text{ μ.}$$
$$\alpha = \frac{4}{5} \text{ μ.}$$

2ο Πρόβλημα

Στον διπλανό πίνακα, αναγράφονται οι αποστάσεις που έτρεξε ο Νίκος, το πρωί και το απόγευμα, σε τρεις ημέρες.



	Πρωί	Απόγευμα
Ημέρα 1 ^η	$\frac{2}{5}$ χμ.	$\frac{1}{2}$ χμ.
Ημέρα 2 ^η	$\frac{5}{8}$ χμ.	$\frac{3}{4}$ χμ.
Ημέρα 3 ^η	$\frac{6}{5}$ χμ.	$\frac{7}{10}$ χμ.

α) Ποιες ημέρες έτρεξε ο Νίκος περισσότερο από 1 χμ.;

$$1^{\text{η}} \text{ μέρα: } \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} + \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10} \text{ χμ.}$$

$$2^{\text{η}} \text{ μέρα: } \frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{5}{8} + \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{5}{8} + \frac{6}{8} = \frac{11}{8} \text{ χμ.}$$

$$3^{\text{η}} \text{ μέρα: } \frac{6}{5} + \frac{7}{10} = \frac{6 \times 2}{5 \times 2} + \frac{7}{10} = \frac{12}{10} + \frac{7}{10} = \frac{19}{10} \text{ χμ.}$$

Περισσότερο από 1 χμ. έτρεξε τη 2^η και την 3^η μέρα

β) Πόσα χιλιόμετρα περισσότερο έτρεξε ο Νίκος την τρίτη από τη δεύτερη ημέρα; .

$$\frac{19}{10} - \frac{11}{8} = \frac{19 \times 4}{10 \times 4} - \frac{11 \times 5}{8 \times 5} = \frac{76}{40} - \frac{55}{40} = \frac{21}{40} \text{ χμ.}$$

Την 3^η ημέρα έτρεξε $\frac{21}{40}$ χμ. περισσότερο.

3ο Πρόβλημα

Οι κατασκηνωτές χρειάστηκαν $4\frac{2}{5}$ ώρες, για να φτάσουν στην κορυφή του βουνού. Έκαναν την πρώτη στάση τους στα τρία δέντρα, ύστερα από πορεία $1\frac{2}{3}$ ωρών.



Η επόμενη στάση τους ήταν στη σπηλιά $1\frac{1}{6}$ ώρες μετά.

Πόση ώρα έκαναν, για να φτάσουν από την σπηλιά μέχρι την κορυφή;



Χρόνος μέχρι τη σπηλιά: $1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{6} = \frac{5}{3} + \frac{7}{6} = \frac{5 \times 2}{3 \times 2} + \frac{7}{6} = \frac{10}{6} + \frac{7}{6} = \frac{17}{6}$ ώρες

Χρόνος από τη σπηλιά ως την κορυφή: $4\frac{2}{5} - \frac{17}{6} = \frac{22}{5} - \frac{17}{6} = \frac{22 \times 6}{5 \times 6} - \frac{17 \times 5}{6 \times 5} = \frac{132}{30} - \frac{85}{30} = \frac{47}{30} = 1\frac{17}{30}$ ώρες = $= 1\frac{34}{60}$ ώρες = 1 ώρα 34 λεπτά.

Διερεύνηση – Επέκταση

Στη διπλανή σχολική εφημερίδα είναι χρωματισμένοι οι χώροι που καταλαμβάνουν τα θέματα της εφημερίδας.

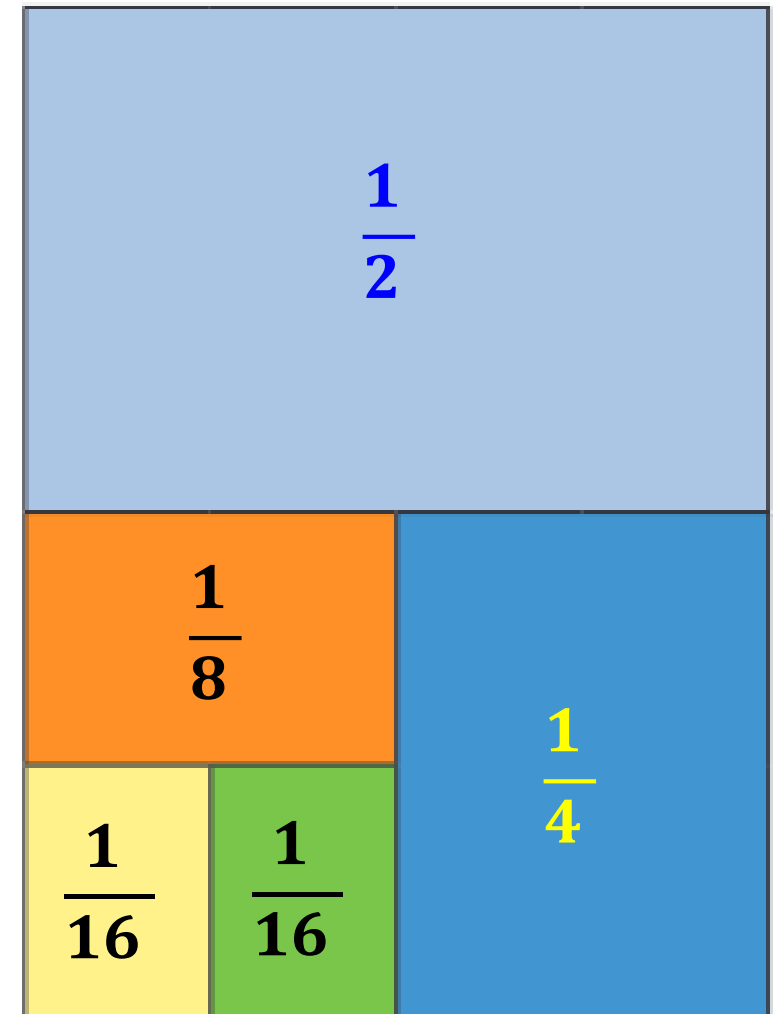
τα νέα του σχολείου ■ σπαζοκεφαλιές ■
δημοτικά νέα ■ σταυρόλεξα ■ αινίγματα ■

α. Τι μέρος της σελίδας καταλαμβάνουν συνολικά οι σπαζοκεφαλιές και τα αινίγματα;

σπαζοκεφαλιές και αινίγματα $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{1 \times 4}{4 \times 4} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ της σελίδας

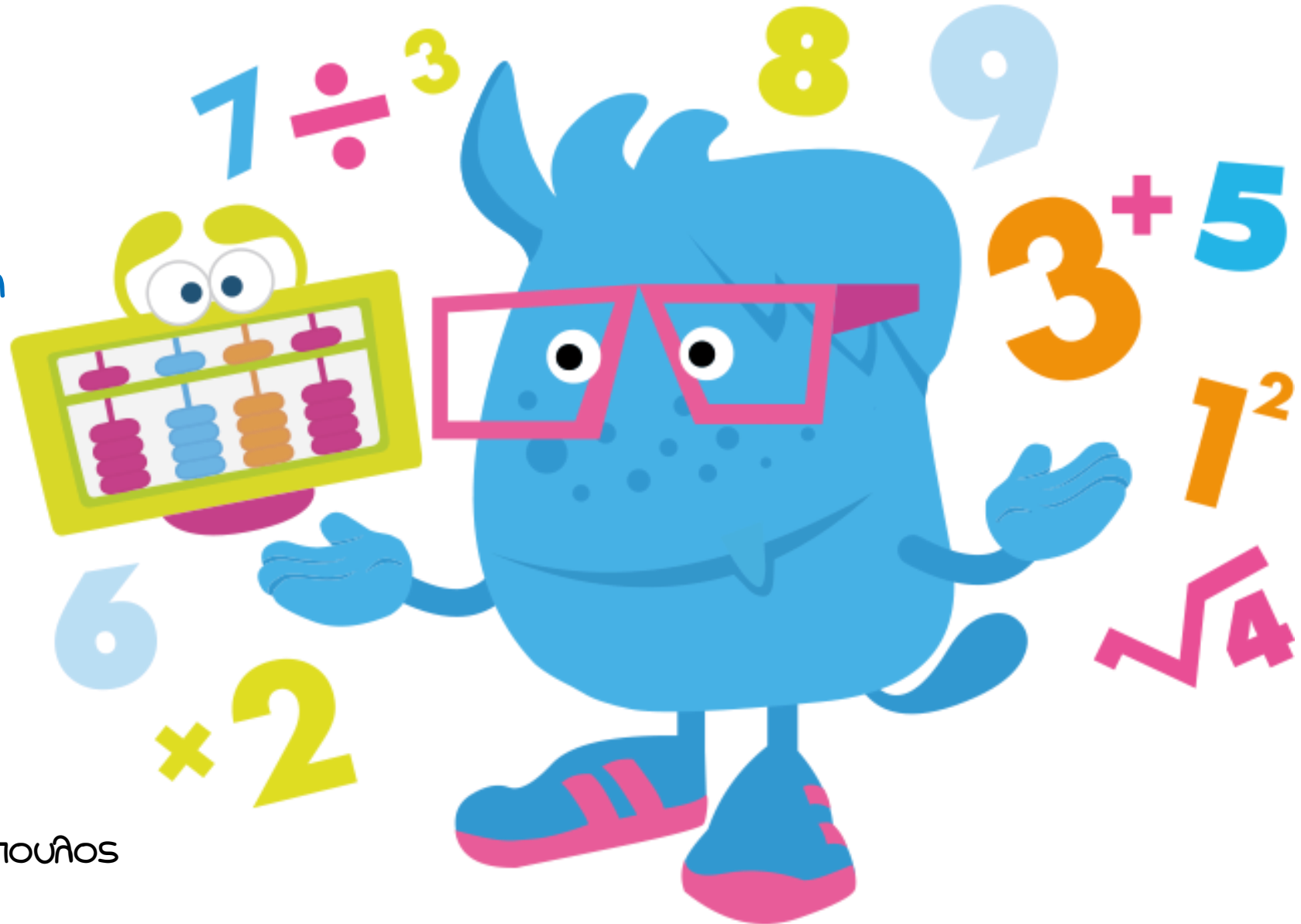
β. Τι μέρος της εφημερίδας καταλαμβάνουν τα υπόλοιπα θέματα;

Υπόλοιπα θέματα $1 - \frac{5}{16} = \frac{16}{16} - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$ της σελίδας



Μαθηματικά Ε' τάξης

Λύσεις
ασκήσεων
Βιβλίου μαθητή
και Τετραδίου
εργασιών



Αποστόλης Αγγελόπουλος

18. Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων