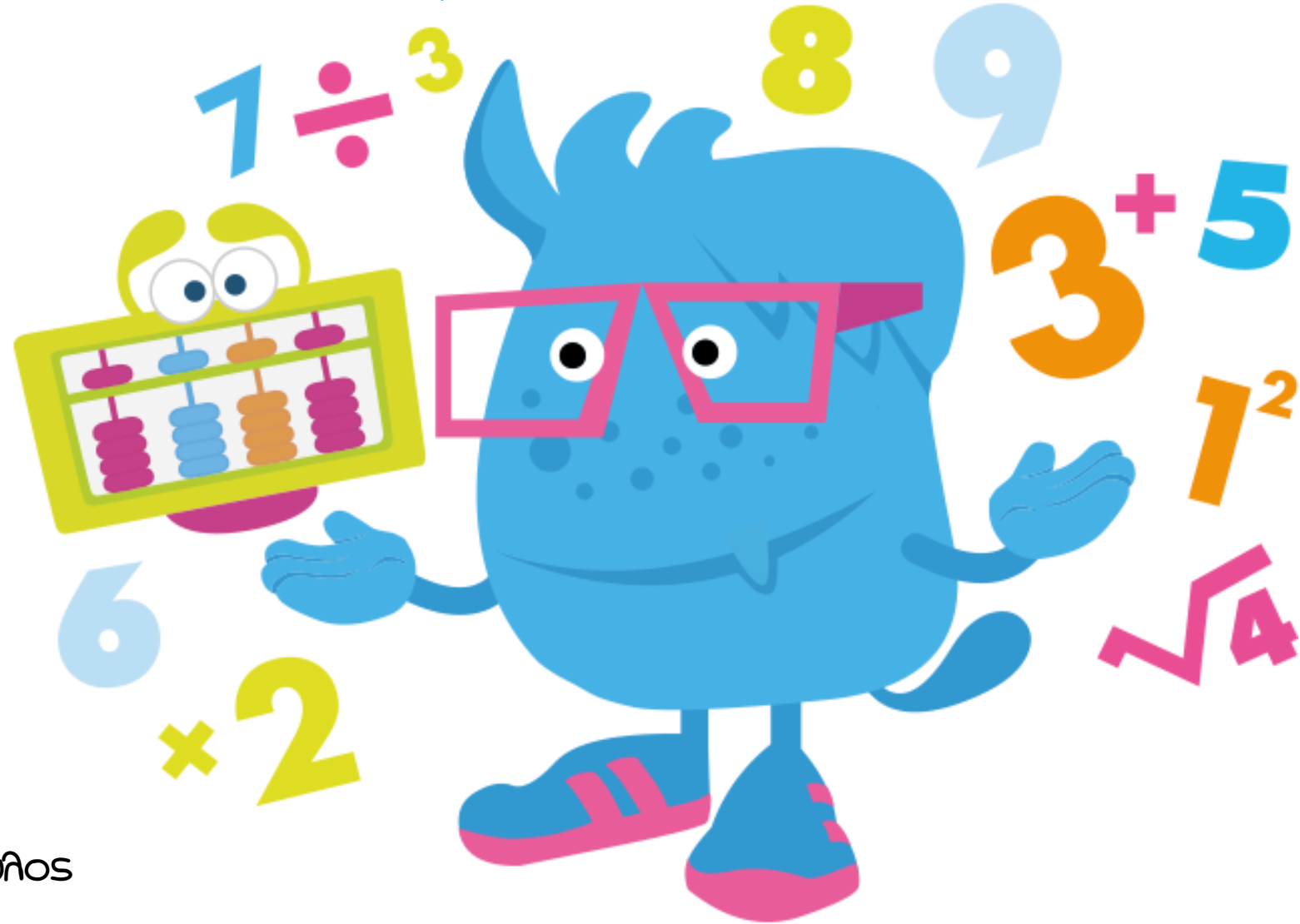


Μαθηματικά Ε' τάξης



Λύσεις ασκήσεων

Βιβλίου μαθητή
και Τετραδίου
εργασιών

Αποστόλης Αγγελόπουλος

23. Χαρακτηριστικές τιμές δεδομένων – Μέση τιμή



Διερεύνηση



Ο Τζέιμς σημείωσε στους δέκα πρώτους αγώνες μπάσκετ της ομάδας του τους πόντους που φαίνονται στο ραβδόγραμμα:

α. Παρατηρούμε το ραβδόγραμμα:

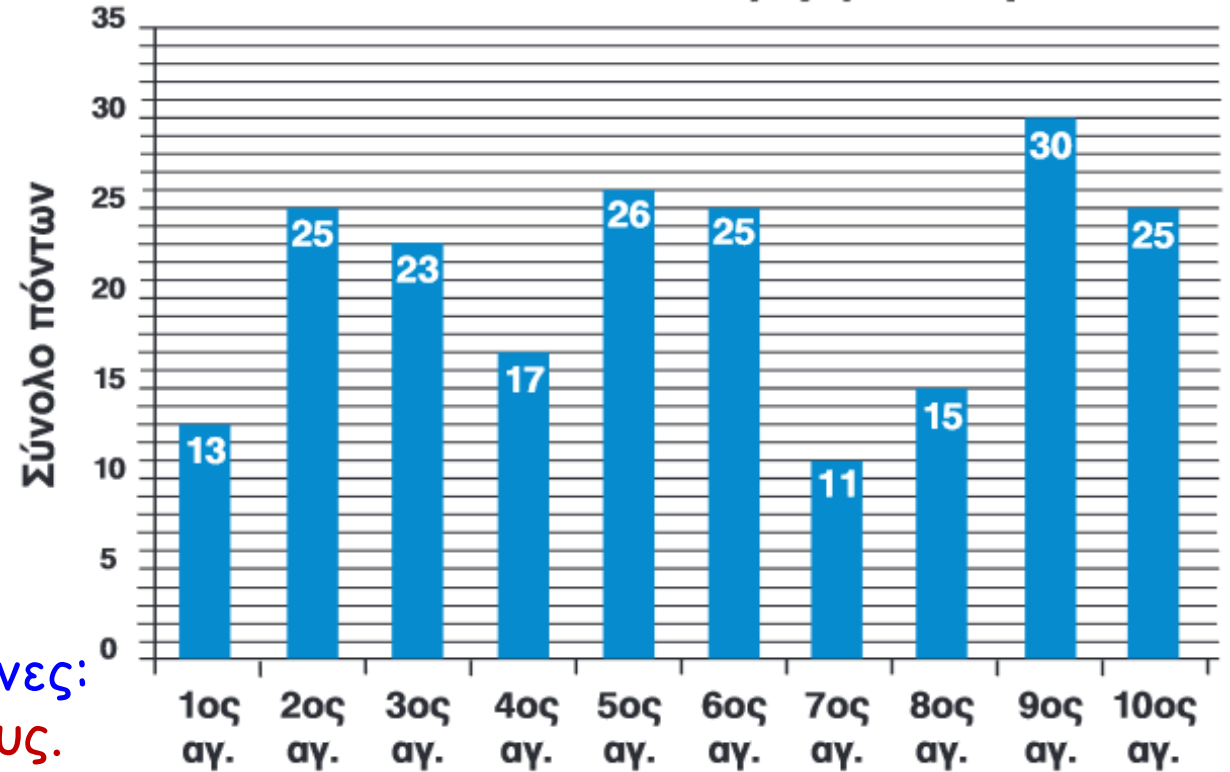
1. Πόσους πόντους σημείωσε συνολικά και στους δέκα αγώνες;

Ο Τζέιμς σημείωσε συνολικά και στους δέκα αγώνες:
 $13+25+23+17+26+25+11+15+30+25 = 210$ πόντους.

2. Αν οι συνολικοί πόντοι μοιράζονταν εξίσου και στους 10 αγώνες, πόσους πόντους θα σημείωνε σε κάθε αγώνα;

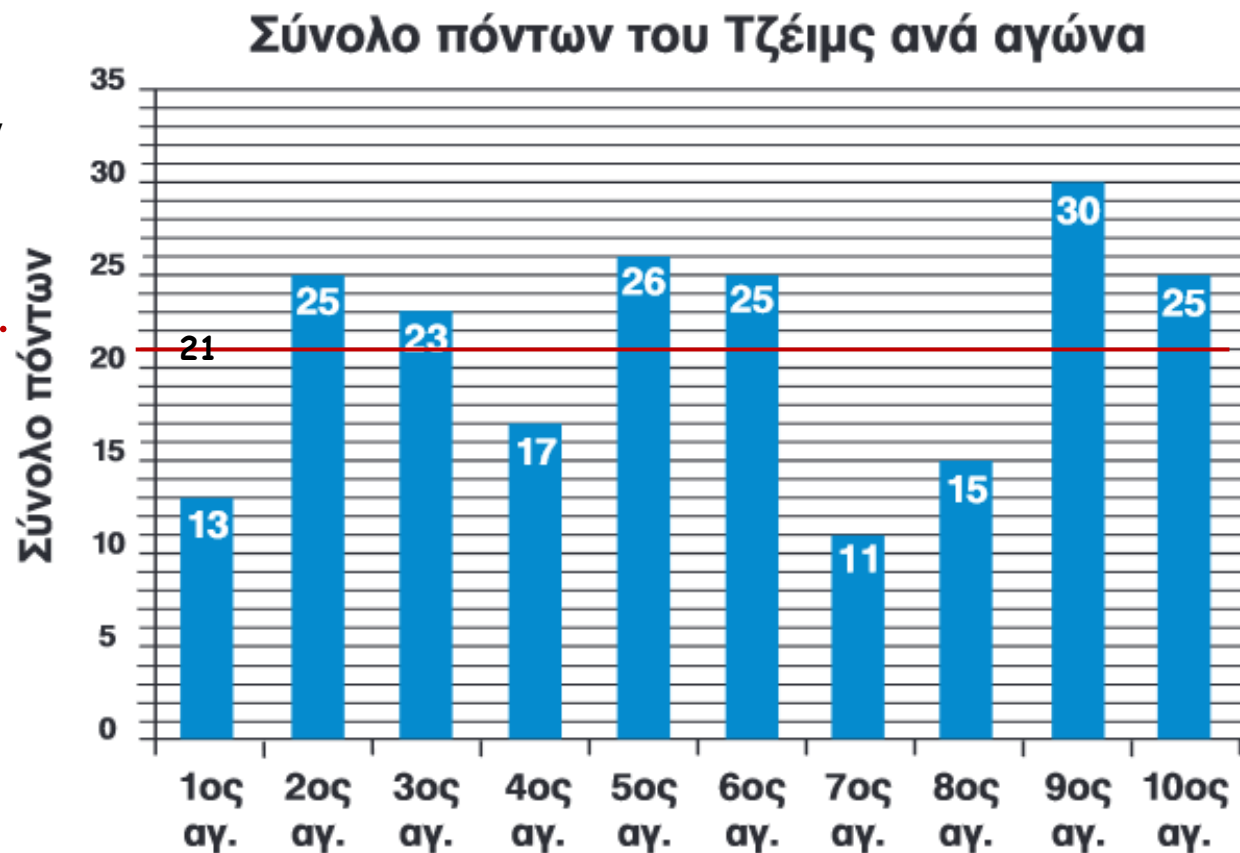
Αν οι συνολικοί πόντοι μοιράζονταν εξίσου και στους 10 αγώνες, θα σημείωνε σε κάθε αγώνα
 $210 : 10 = 21$ πόντους

Σύνολο πόντων του Τζέιμς ανά αγώνα



3. Χαράζουμε μια κόκκινη γραμμή παράλληλη στον οριζόντιο άξονα, που θα δείχνει το ύψος των ράβδων, εάν οι συνολικοί πόντοι μοιράζονταν εξίσου και στους 10 αγώνες

Η κόκκινη γραμμή ξεκινά από τον αριθμό 21.



β. Συμπληρώνουμε τον ακόλουθο πίνακα συχνοτήτων.

Σύνολο διαφορετικών πόντων ανά αγώνα	Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα εμφάνισης
13		1
25		3
23		1
17		1
26		1
11		1
15		1
30		1

1. Ποια είναι η μικρότερη τιμή πόντων; **11**.....
 2. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή πόντων; **30**.....
 3. Ποια τιμή πόντων εμφανίζεται πιο συχνά; **25**.....

γ. Διατάσσουμε τους πόντους με τη σειρά από τους λιγότερους, ανά αγώνα, στους περισσότερους.

...**11 < 13 < 15 < 17 < 23 < 25 < 26 < 30**.....

Ποια τιμή ή ποιες δύο τιμές βρίσκονται στη μέση της διάταξης και χωρίζουν το σύνολο των τιμών σε δυο ίσα μέρη, από τα οποία το ένα μέρος έχει τις μικρότερες τιμές και το άλλο τις μεγαλύτερες;

Οι τιμές **17** και **23** βρίσκονται στη μέση της διάταξης και χωρίζουν το σύνολο των τιμών σε δύο ίσα μέρη.

Αριστερά από το 17 βρίσκονται οι μικρότερες τιμές και δεξιά από το 23 βρίσκονται οι μεγαλύτερες τιμές:

11, 13, 15, **17**, **23**, 25, , 26, 30



Συζητάμε και κάνουμε προβλέψεις για το μέλλον του παίκτη.

- Με βάση τα δεδομένα, ποια πρόβλεψη μπορούμε να κάνουμε για την πορεία του παίκτη στη διάρκεια της αγωνιστικής περιόδου;
- Ο παίκτης κατά τη διάρκεια της αγωνιστικής περιόδου αναμένεται να σημειώνει περίπου 21 πόντους ανά αγώνα.
- Ποιοι πιθανοί παράγοντες μπορούν να ανατρέψουν τις προβλέψεις μας;
- Πολλοί παράγοντες μπορούν να ανατρέψουν τις προβλέψεις μας. Για παράδειγμα, μπορεί οι άμυνες των αντιπάλων να είναι καλύτερες και να μην είναι τόσο εύστοχος, μπορεί να μειωθεί ο χρόνος συμμετοχής του στα επόμενα παιχνίδια, μπορεί να τραυματιστεί κ.ά.



Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

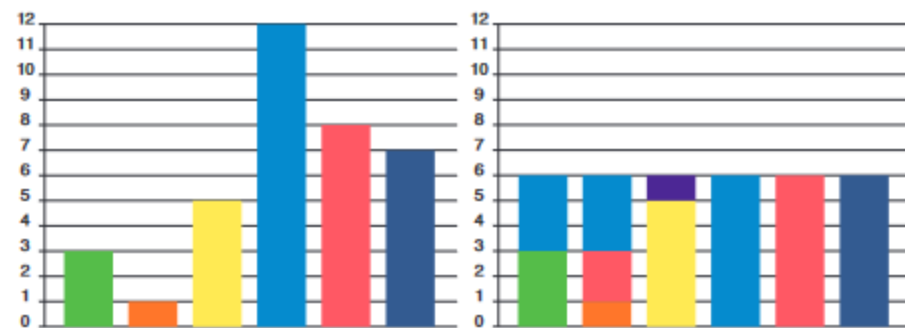
Κατά την επεξεργασία των αριθμητικών δεδομένων, βρίσκουμε κάποιες χαρακτηριστικές τιμές, χρήσιμες στην ερμηνεία των δεδομένων.
Μία από αυτές είναι η μέση τιμή ή μέσος όρος.

Για να υπολογίσουμε τη **μέση τιμή** ή τον **μέσο όρο**, προσθέτουμε τις τιμές όλων των δεδομένων και διαιρούμε το άθροισμά τους με το πλήθος των δεδομένων.

$$\text{Μέση τιμή ή μέσος όρος} = \frac{\text{άθροισμα δεδομένων}}{\text{πλήθος δεδομένων}}$$

Παραδείγματα

Οι μετρήσεις της θερμοκρασίας στη Λαμία κάθε 4 ώρες στις 25/12/2017 ήταν: 3 °C, 1 °C, 5 °C, 12 °C, 8 °C, 7 °C.



Μέση τιμή ή μέσος όρος

$$\frac{3+1+5+12+8+7}{6} = \frac{36}{6} = 6 \text{ } ^\circ\text{C}.$$



Εφαρμογή Υπολογίζω τη μέση τιμή

Σύμφωνα με το Εθνικό Αστεροσκοπείο Αθηνών, η μέση μηνιαία βροχόπτωση στην Αθήνα τον περασμένο αιώνα ήταν 33,29 χιλιοστά. Συγκρίνουμε τη μέση μηνιαία βροχόπτωση της Αθήνας με αυτήν της πόλης των Ιωαννίνων την ίδια περίοδο.

Παρατηρούμε και σχολιάζουμε το διάγραμμα.

1. Άθροισμα των δεδομένων:

$$124,2 + 111,6 + 95,4 + 78 + 69,3 + 43,5 + 32 + 31,2 + 54 + 99,5 + 167,9 + 174,9 = 1081,5.$$

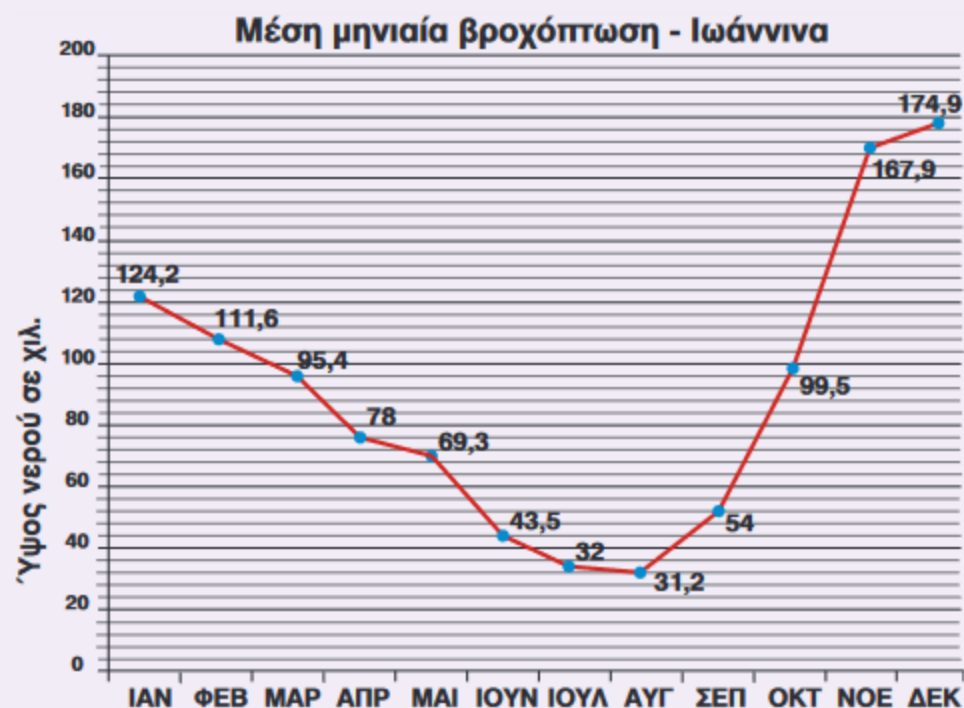
2. Πλήθος των δεδομένων: 12.

3. Άρα η μέση τιμή είναι:

$$\frac{1081,5}{12} = 1081,5 : 12 = 90,125 \text{ χιλ.}$$

Παρατηρούμε ότι η μέση μηνιαία βροχόπτωση στα Ιωάννινα είναι σχεδόν τριπλάσια από αυτήν της Αθήνας.

Η μέση τιμή της βροχόπτωσης το καλοκαίρι στα Ιωάννινα είναι περίπου όση είναι η μέση μηνιαία τιμή όλου του έτους για την Αθήνα.



1. Η μέση τιμή ενός συνόλου δεδομένων είναι πάντα η τιμή ενός από τα δεδομένα;

Δεν είναι απαραίτητο. Μπορεί να είναι μία διαφορετική τιμή από τα δεδομένα.

2. Αν γνωρίζουμε τη μέση τιμή του ύψους 180 αγοριών Ε΄ δημοτικού, μπορούμε να εκτιμήσουμε το ύψος που έχουν όλα τα αγόρια στην ηλικία αυτή;

Δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε το ύψος που έχουν όλα τα αγόρια στην ηλικία αυτή διότι τα 180 αγόρια αποτελούν ένα μικρό δείγμα σε σχέση με το σύνολο. Παρόλα αυτά η τιμή είναι πολύ πιθανόν να βρίσκεται πολύ κοντά με το μέσο όρο του ύψους των αγοριών αυτής της ηλικίας.

3. Αν γνωρίζουμε τη μέση τιμή της θερμοκρασίας ενός τόπου σε χρονικό διάστημα 7 ημερών, μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή της θερμοκρασίας του ίδιου τόπου και για τις επόμενες 7 ημέρες; Δικαιολογούμε την απάντησή μας.

Ο υπολογισμός της μέσης τιμής της θερμοκρασίας σε έναν τόπο για μια συγκεκριμένη εποχή απαιτεί μακροχρόνιες μετρήσεις.

Επομένως δεν μπορούμε να κάνουμε εκτίμηση της μέσης τιμής της θερμοκρασίας για την επόμενη εβδομάδα, γιατί τα δεδομένα 7 ημερών δεν είναι αρκετά. Την εβδομάδα αυτή μπορεί να σημειώθηκαν πολύ υψηλές ή πολύ χαμηλές θερμοκρασίες ή ακόμα και να εκδηλώθηκαν ακραία καιρικά φαινόμενα. Μπορεί, επίσης, την επόμενη εβδομάδα να υπάρξει απότομη μεταβολή του καιρού και έτσι να σημειωθούν ακραίες θερμοκρασίες.

Χαρακτηριστικές τιμές δεδομένων – Μέση τιμή

1η Άσκηση

Οι παίκτες της βασικής πεντάδας μιας ομάδας μπάσκετ έχουν τα παρακάτω ύψη σε εκατοστά: 189, 203, 196, 202, 198. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του ύψους των παικτών.

$$\text{Μ.Τ.} = \frac{\text{Άθροισμα δεδομένων}}{\text{Πλήθος δεδομένων}} = \frac{189+203+196+202+198}{5} = \frac{988}{5} = 197,6 \text{ εκ.}$$

Αν ο προπονητής έκανε αλλαγή τον παίκτη ύψους 189 εκ. με έναν παίκτη ύψους 203 εκ., ο μέσος όρος θα αυξανόταν ή θα μειωνόταν;

Αφού $203 > 189$, τότε το άθροισμα δεδομένων θα αυξανόταν και εφόσον το πλήθος δεδομένων παραμένει σταθερό ο μέσος όρος θα αυξανόταν.



2η Άσκηση

Ποια είναι η μέση τιμή των παρακάτω αριθμών;

24	27	25	27	22	25	25	25	23	25
23	26	26	26	24	24	27	26	24	26



Να εκτιμήσεις: Οι τιμές 25 και 26 επαναλαμβάνονται πολλές φορές, ενώ και οι υπόλοιπες τιμές βρίσκονται γύρω από το 25. Εκτιμούμε επομένως, ότι η μέση τιμή πρέπει να είναι περίπου 25.

Να υπολογίσεις: **Άθροισμα αριθμών:** $24 + 27 + 25 + 27 + 22 + 25 + 25 + 25 + 23 + 25 + 23 + 26 + 26 + 26 + 24 + 24 + 27 + 26 + 24 + 26 = 500$

Πλήθος αριθμών : 20

Μέση τιμή: $500 : 20 = 25$

3η Άσκηση

Να βρεις και να συμπληρώσεις στον πίνακα 5 αριθμούς που έχουν μέση τιμή τον αριθμό 7.

10	10	5	5	5
----	----	---	---	---

Για να βρούμε 5 αριθμούς που έχουν μέση τιμή τον αριθμό 7, **πρέπει να βρούμε 5 αριθμούς που έχουν άθροισμα ίσο με $5 \text{ (πλήθος)} \times 7 \text{ (μέση τιμή)} = 35$.**

Π.χ.

$$35=10+10+2+8+5$$

$$35=3+7+10+10+5$$

$$35=12+8+1+4+10$$

$$35= 10+9+8+7+1$$

Υπάρχουν , βεβαίως , αρκετές ακόμα περιπτώσεις.

Μπορούμε να γράψουμε στον πίνακα οποιονδήποτε συνδυασμό 5 αριθμών που έχουν άθροισμα 35.

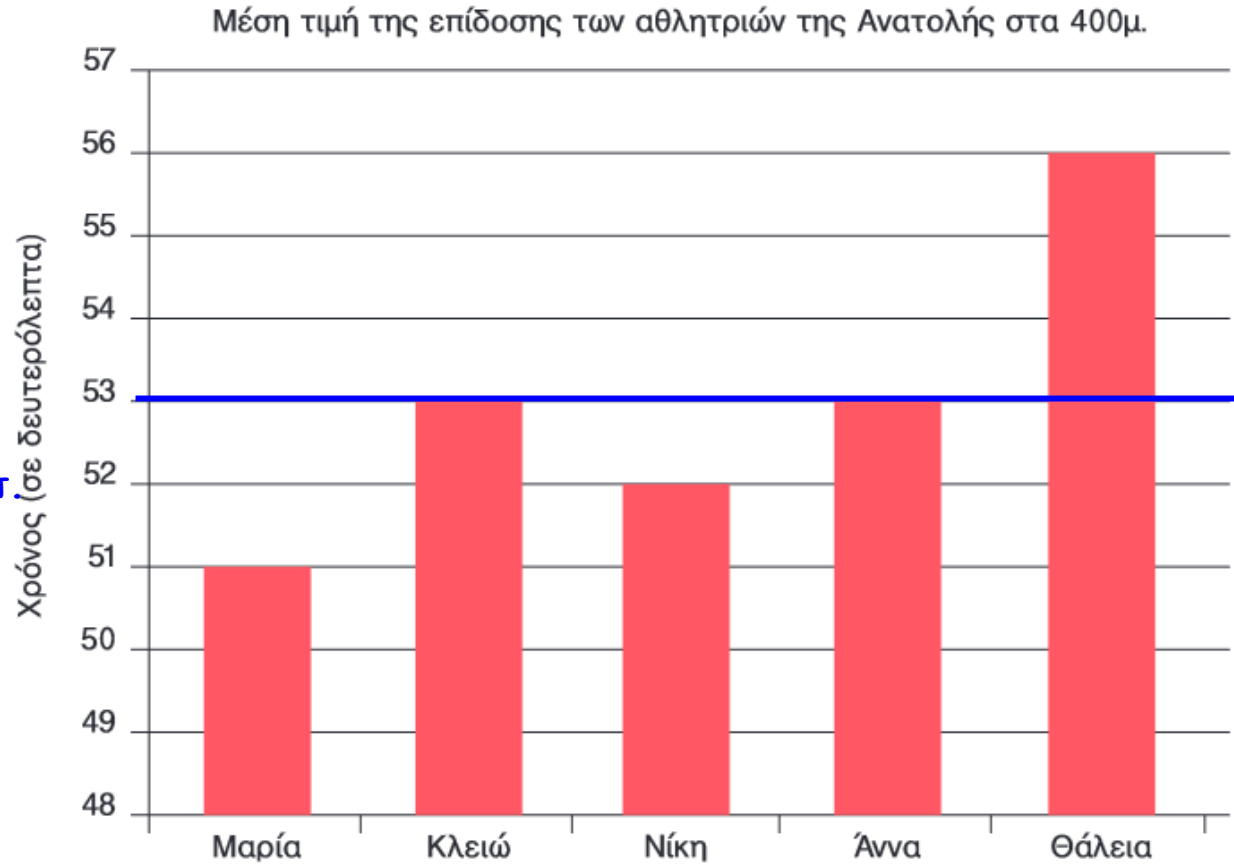
1ο Πρόβλημα

Το ραβδόγραμμα δείχνει τη μέση τιμή σε δευτερόλεπτα των επιδόσεων κάθε αθλήτριας της ομάδας «Ανατολή» στο αγώνισμα 400μ. για την περίοδο 2016-2017.

- Ποια είναι η μέση τιμή των επιδόσεων όλης της ομάδας;

$$Μ.Τ. = \frac{\text{Άθροισμα δεδομένων}}{\text{Πλήθος δεδομένων}} = \frac{51+53+52+53+56}{5} = \frac{265}{5} = 53 \text{ δευτ.}$$

- Να χαράξεις μια οριζόντια μπλε γραμμή που να δείχνει τη μέση τιμή της επίδοσης των αθλητριών.



2ο Πρόβλημα

Ο Νίκος έριξε το ζάρι 5 φορές και έφερε τους αριθμούς 2, 6, 4, 6 και 3.
Αν ρίξει το ζάρι δύο φορές ακόμη, ποιους αριθμούς πρέπει να φέρει,
ώστε η μέση τιμή όλων των ενδείξεων να είναι φυσικός αριθμός;



Μέχρι τώρα το άθροισμα των δεδομένων, για τις 5 ρίψεις, είναι: $2+6+4+6+3=21$

Για να είναι η μέση τιμή των ενδείξεων φυσικός αριθμός πρέπει:

- να είναι πολλαπλάσιο του 7 (5 ρίψεις + 2 ρίψεις = 7) , ώστε να διαιρείται ακριβώς με το 7 ,
- μεγαλύτερο από το 21 (που ήδη έχει φέρει) και
- μικρότερο από το 33 (οι επόμενες 2 ρίψεις θα είναι το πολύ $6+6=12$, επομένως $21+12=33$ το πολύ.)

Τα πολλαπλάσια του 7 που είναι μεγαλύτερα από το 21 και μικρότερα του 33 είναι μόνο ένα: Το 28.
Επομένως **πρέπει να φέρει** $28 - 21 = 7$,

άρα μπορεί να τύχουν οι ενδείξεις 1 και 6 ή 2 και 5 ή 3 και 4.

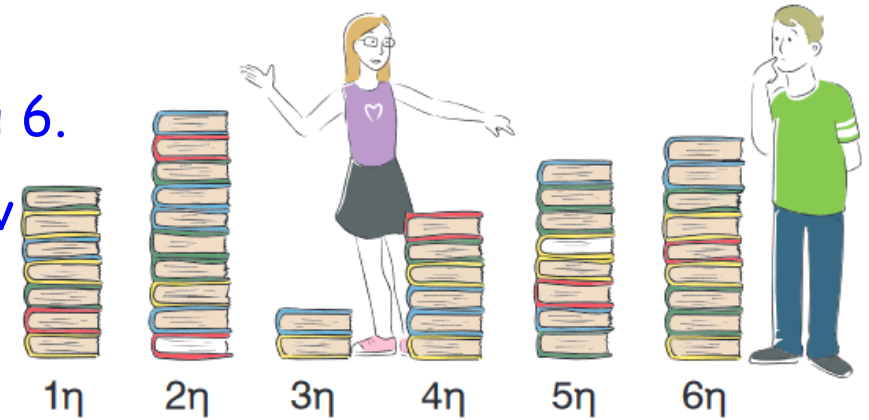
3ο Πρόβλημα

Η Αγγελική και ο Αντρέι τακτοποιούν τα βιβλία της βιβλιοθήκης της τάξης τους σε στοίβες. Θέλουν να μετακινήσουν τα βιβλία, ώστε κάθε στοίβα να έχει τον ίδιο αριθμό βιβλίων.

- Μπορούν να πετύχουν το στόχο τους;

Το σύνολο των βιβλίων είναι 42 και το πλήθος των στοιβών είναι 6.

Ο αριθμός 6 είναι διαιρέτης του 42, επομένως τα παιδιά μπορούν να μετακινήσουν τα βιβλία, ώστε κάθε στοίβα να έχει τον ίδιο αριθμό βιβλίων.



Κάθε στοίβα θα έχει $42 : 6 = 7$ βιβλία.

- Να υπολογίσεις με μαθηματική πράξη τον αριθμό βιβλίων που θα έχει κάθε στοίβα μετά τη μετακίνηση.

$$\text{Μ.Τ.} = \frac{\text{Άθροισμα δεδομένων}}{\text{Πλήθος δεδομένων}} = \frac{7+10+2+6+8+9}{6} = \frac{42}{6} = 7 \text{ βιβλία}$$

- Σε ποια περίπτωση δεν θα μπορούσαν όλες οι στοίβες να έχουν τον ίδιο αριθμό βιβλίων;

Στην περίπτωση που το άθροισμα των βιβλίων δεν ήταν πολλαπλάσιο του 6, οι στοίβες δε θα είχαν όλες τον ίδιο αριθμό βιβλίων.

Διερεύνηση – Επέκταση

Μερικά αγόρια της ΣΤ΄ τάξης μέτρησαν το ύψος τους και κατέγραψαν τις τιμές σε έναν πίνακα.

α. Να βρεις στα δεδομένα σου αν υπάρχει κάποια τιμή που διαφέρει πολύ από τις υπόλοιπες.

Όλα τα αγόρια έχουν ύψος κοντά στα 150 εκατοστά με εξαίρεση τον Δημήτρη που το ύψος του (178 εκ.) είναι αρκετά μεγαλύτερο από των υπολοίπων.

β. Να υπολογίσεις τη μέση τιμή του ύψους των αγοριών:

1. με όλες τις τιμές των δεδομένων.

$$\text{Μ.Τ.} = \frac{\text{Άθροισμα δεδομένων}}{\text{Πλήθος δεδομένων}} = \frac{151+150+146+178+145+143}{6} = \frac{913}{6} = 152,16 \text{ εκ.}$$

2. χωρίς να λάβεις υπόψη σου την τιμή που διαφέρει πολύ από τις υπόλοιπες.

$$\text{Μ.Τ.} = \frac{\text{Άθροισμα δεδομένων}}{\text{Πλήθος δεδομένων}} = \frac{151+150+146+145+143}{5} = \frac{735}{5} = 147 \text{ εκ.}$$

Αγόρια	Ύψος σε εκατοστά
Νίκος	151
Θοδωρής	150
Θανάσης	146
Δημήτρης	178
Έντρι	145
Τάκης	143

Διερεύνηση – Επέκταση

Μερικά αγόρια της ΣΤ΄ τάξης μέτρησαν το ύψος τους και κατέγραψαν τις τιμές σε έναν πίνακα.

γ. Να συζητήσεις με τους συμμαθητές και τις συμμαθήτριές σου τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζει η τιμή που διαφέρει πολύ από τις υπόλοιπες τη μέση τιμή των δεδομένων.

Το ύψος του Δημήτρη οδηγεί σε μεγαλύτερη μέση τιμή του ύψους των αγοριών.

δ. Ποια μέση τιμή από τις δύο αντιπροσωπεύει καλύτερα τα δεδομένα;

Η μέση τιμή του ύψους των αγοριών, εκτός του ύψους του Δημήτρη, αντιπροσωπεύει καλύτερα τα δεδομένα, καθώς τα υπόλοιπα ύψη δε διαφέρουν σημαντικά από αυτή τη μέση τιμή.

Αγόρια	Ύψος σε εκατοστά
Νίκος	151
Θοδωρής	150
Θανάσης	146
Δημήτρης	178
Έντρι	145
Τάκης	143

Μαθηματικά Ε' τάξης

Λύσεις
ασκήσεων
Βιβλίου μαθητή
και Τετραδίου
εργασιών



Αποστόλης Αγγελόπουλος

23. Χαρακτηριστικές τιμές δεδομένων – Μέση τιμή