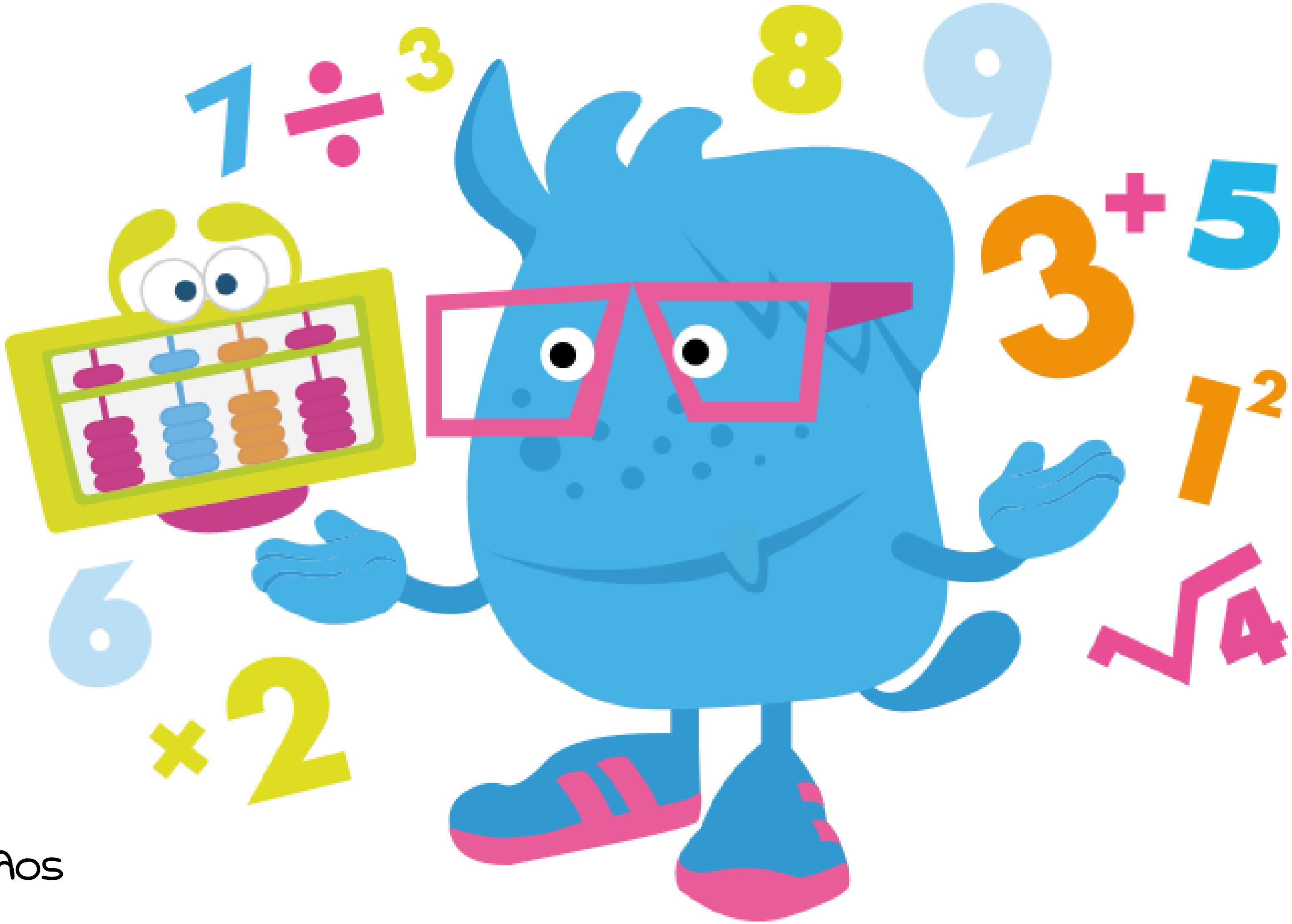
Μαθηματικά Ε' τάξης

Λύσεις ασκήσεων

Βιβλίου μαθητή και Τετραδίου εργασιών



Αποστόλης Αγγελόπουλος

24. Πιθανότητες

Διερεύνηση

Παίζουμε ένα παιχνίδι στο οποίο κερδίζει μόνον όποιος φέρει στον διπλανό τροχό το χρώμα που έχει επιλέξει. Ποιο χρώμα θα διάλεγες για εσένα;

Το κίτρινο γιατί είναι περισσότερα κομμάτια.

α. Κάνουμε προβλέψεις για το πείραμα τύχης.

Συζητάμε πόσο πιθανό είναι να έρθει καθένα από τα χρώματα, αν περιστρέψουμε τον τροχό.

Ο τροχός αποτελείται από 8 ίσα μέρη. Επομένως:

-Το κίτρινο μπορεί να έρθει 4 στις 8 φορές.

-Το κόκκινο μπορεί να έρθει 2 στις 8 φορές.

-Το πράσινο μπορεί να έρθει 1 στις 8 φορές.

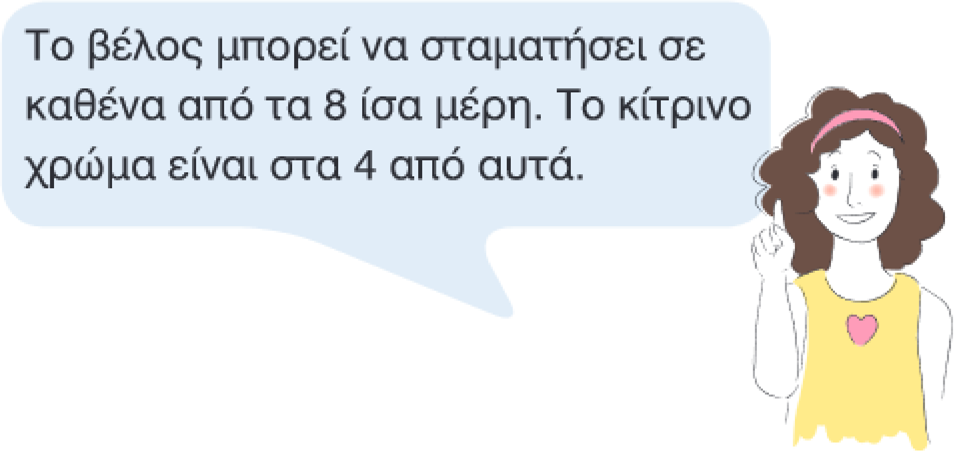
-Το μπλε μπορεί να έρθει 1 στις 8 φορές.

β. Κάνουμε το πείραμα τύχης.
Χωριζόμαστε σε ομάδες και χρησιμοποιούμε τον τροχό από το παράρτημα. Περιστρέφουμε τον τροχό 20 φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματά μας.

1. Παρατηρούμε τη συχνότητα εμφάνισης κάθε χρώματος. Ποιο χρώμα είναι πιο πιθανόν να εμφανίζεται κάθε φορά;

Το κίτρινο γιατί είναι 4 από τα 8 κομμάτια και είναι τα περισσότερα κομμάτια.

Αποτελέσματα της ομάδας μου		
Χρώμα	**Καταμέτρηση με γραμμές**	**Συχνότητα εμφάνισης με αριθμό**
πράσινο	|||	3
κίτρινο	𝍸 𝍸	10
μπλε	||	2
κόκκινο	𝍸	5



2. Πόσες φορές αναμένουμε να εμφανιστεί κόκκινο χρώμα σε 8 περιστροφές του τροχού;

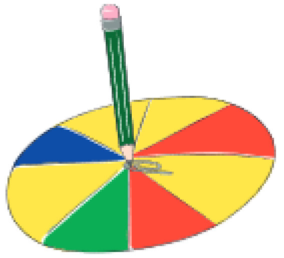
Εφόσον τα κόκκινα είναι 2 από τα 8, περιμένουμε να εμφανιστεί 2 φορές στις 8 περιστροφές.

3. Πόσες φορές αναμένουμε να εμφανιστεί πράσινο χρώμα σε 8 περιστροφές του τροχού;

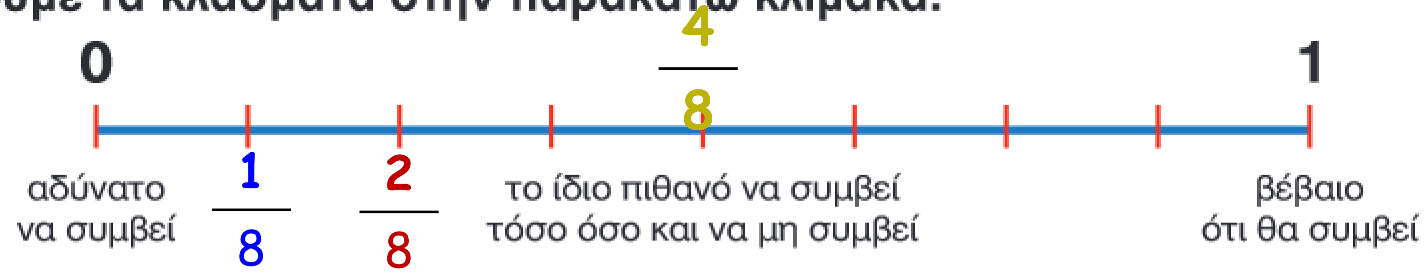
Εφόσον τα πράσινα είναι 1 από τα 8, περιμένουμε να εμφανιστεί 1 φορά στις 8 περιστροφές.

γ. Γράφουμε με κλάσμα την πιθανότητα εμφάνισης κάθε χρώματος, όταν περιστρέφουμε τον τροχό.

Πιθανότητα να έρθει: κίτρινο = $\frac{4}{8}$, κόκκινο = $\frac{2}{8}$, μπλε = $\frac{1}{8}$, πράσινο = $\frac{1}{8}$

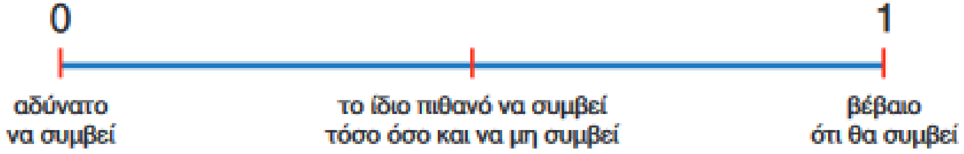


δ. Τοποθετούμε τα κλάσματα στην παρακάτω κλίμακα.



Συγκρίνουμε τις πιθανότητες που υπολογίσαμε, με τον τρόπο αυτό, με τις αρχικές μας προβλέψεις.

Οι πιθανότητες που υπολογίσαμε συμπίπτουν με τις αρχικές μας προβλέψεις.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Ένα πείραμα που δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμά του, όταν το κάνουμε, ονομάζεται **πείραμα τύχης.**	Αν ρίξουμε ένα ζάρι 1000 φορές, δεν μπορούμε να προβλέψουμε πόσες φορές θα εμφανιστεί κάθε αριθμός.
Σε ένα πείραμα τύχης, το πόσο πιθανό είναι να έρθει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα λέγεται **πιθανότητα** και μπορεί να υπολογιστεί με ένα κλάσμα: $$\textbf{πιθανότητα} = \frac{\textbf{\textit{πλήθος των επιθυμητών αποτελεσμάτων}}}{\textbf{\textit{πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων}}}$$	Η πιθανότητα να έρθει 3, αν ρίξουμε ένα ζάρι είναι: $$\frac{\textit{πόσες φορές το 3 στο ζάρι}}{\textit{πλήθος των αριθμών στο ζάρι}} = \frac{1}{6}.$$
Η πιθανότητα να έρθει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί με μια κλίμακα που εκτείνεται από το **αδύνατο να συμβεί** έως το **βέβαιο ότι θα συμβεί.** Η μέση της κλίμακας αντιπροσωπεύει αυτό που είναι **πιθανό τόσο να συμβεί, όσο και να μην συμβεί.**	Όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6). Το πλήθος των επιθυμητών αποτελεσμάτων είναι 1 (το 3 εμφανίζεται μία φορά στα 6 αποτελέσματα). 

Εφαρμογή Εκφράζω την πιθανότητα με κλάσμα

Μέσα σε μια τσάντα βρίσκονται ανακατεμένες ομοιόμορφες μπάλες. Οι 5 είναι κόκκινες, οι 2 κίτρινες και 3 είναι μπλε.
α. Υπολογίζουμε την πιθανότητα να τραβήξουμε:

1. μια κίτρινη μπάλα: $\dfrac{\textit{πλήθος από κίτρινες μπάλες}}{\textit{πλήθος από όλες τις μπάλες}} = \dfrac{2}{10}$

2. μια κόκκινη μπάλα: $\dfrac{\textit{πλήθος από κόκκινες μπάλες}}{\textit{πλήθος από όλες τις μπάλες}} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ (μισές – μισές πιθανότητες).

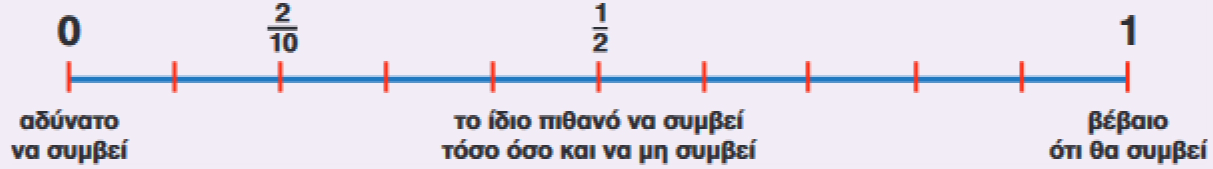
3. μια πράσινη μπάλα: $\dfrac{\textit{πλήθος από πράσινες μπάλες}}{\textit{πλήθος από όλες τις μπάλες}} = \dfrac{0}{10} = 0$. Η πιθανότητα είναι 0, δηλαδή είναι αδύνατο να συμβεί, γιατί δεν υπάρχει πράσινη μπάλα.

4. μια κόκκινη ή κίτρινη ή μπλε μπάλα:

$$\dfrac{\textit{πλήθος από κόκκινες και κίτρινες και μπλε μπάλες}}{\textit{πλήθος από όλες τις μπάλες}} = \dfrac{(5+2+3)}{10} = \dfrac{10}{10} = 1.$$

Η πιθανότητα είναι 1, δηλαδή είναι βέβαιο ότι θα συμβεί, γιατί οι μπάλες στην τσάντα είναι μόνο κόκκινες, κίτρινες και μπλε.

β. Τοποθετούμε τις παραπάνω πιθανότητες στην παρακάτω αριθμογραμμή.



Αναστοχασμός

1. Ο Νίκος ισχυρίζεται ότι σε ένα παιχνίδι τύχης με αριθμούς από το 1 έως το 20, το 17 είναι πιο πιθανό να εμφανιστεί, επειδή είναι ο τυχερός του αριθμός. Έχει δίκιο;

(Η κόκκινη γραμμή ξεκινά [illegible] τον αριθμό 21 .)

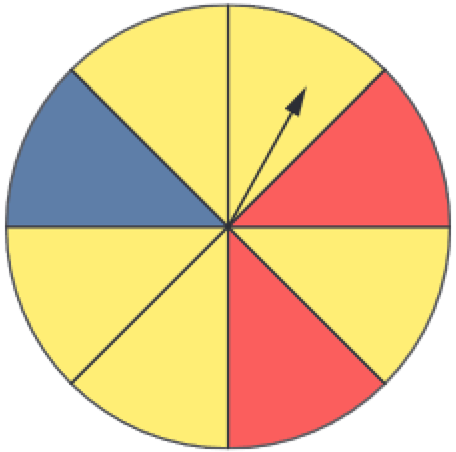
Ο Νίκος δεν έχει δίκιο γιατί όλοι οι αριθμοί έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν, δηλαδή έχουν πιθανότητα εμφάνισης $\frac{1}{20}$.

2. Ρίχνουμε ένα ζάρι 10.000 φορές. Πόσες περίπου φορές θα έρθει ο αριθμός 2;

Η πιθανότητα να έρθει ο αριθμός 2, αν ρίξουμε ένα ζόρι μία φορά, είναι $\frac{1}{6}$.
Συνεπώς, αν ρίξουμε το ζάρι 10.000 φορές, ο αριθμός 2 θα έρθει περίπου
10.000 x $\frac{1}{6} = \frac{10.000}{6}$, δηλαδή 1.667 φορές (στρογγυλοποίηση στις μονάδες).

1η Άσκηση

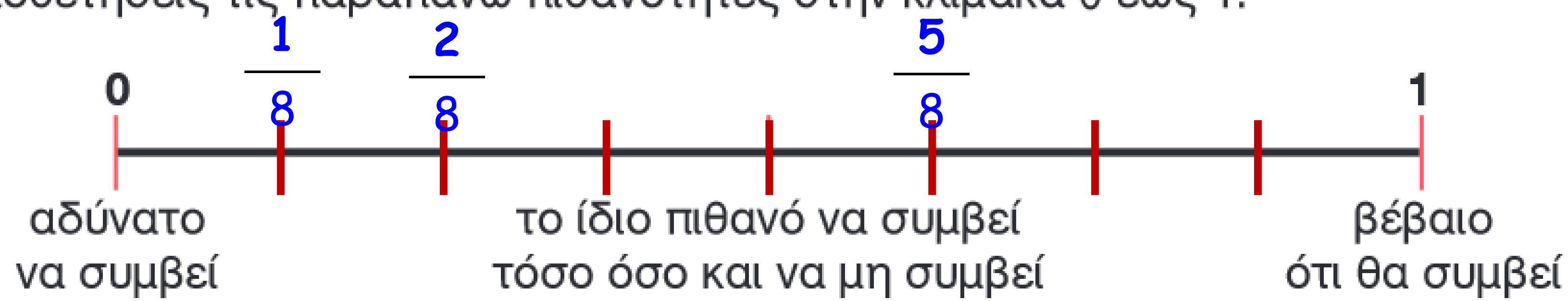
Η Δανάη περιστρέφει τον δείκτη στον διπλανό τροχό.



α. Να εκφράσεις με κλάσμα την πιθανότητα:

1. Ο δείκτης να σταματήσει σε μπλε χρώμα: $\frac{1}{8}$
2. Ο δείκτης να σταματήσει σε κόκκινο χρώμα: $\frac{2}{8}$
3. Ο δείκτης να σταματήσει σε κίτρινο χρώμα: $\frac{5}{8}$

β. Να τοποθετήσεις τις παραπάνω πιθανότητες στην κλίμακα 0 έως 1.



2η Άσκηση

Ρίχνεις ένα ζάρι. Να υπολογίσεις την πιθανότητα ο αριθμός που θα έρθει να είναι πολλαπλάσιο του 2.

Ένα ζάρι έχει 6 έδρες με αριθμούς από το 1 μέχρι και το 6, που παριστάνονται με τελείες.

Τα πολλαπλάσια του 2 μέχρι το 6 είναι τρία: 2, 4 και 6.

Άρα αν ρίξουμε το ζάρι οι πιθανότητες είναι τρεις στις έξι ή $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ δηλαδή μία στις δύο.

$$\text{Πιθανότητα} = \frac{\text{Πλήθος των επιθυμητών αποτελεσμάτων}}{\text{Πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3η Άσκηση

Δυο παιδιά γυρίζουν τον τροχό. Ο πρώτος παίχτης κερδίζει έναν πόντο, αν φέρει μονό αριθμό. Ο δεύτερος παίχτης κερδίζει έναν πόντο, αν φέρει ζυγό αριθμό.
Είναι δίκαιο το παιχνίδι; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

Όλοι οι αριθμοί στον τροχό είναι 9.
Οι μονοί αριθμοί είναι 5: οι 1, 3, 5, 7, 9.
Οι ζυγοί αριθμοί είναι 4: οι 2, 4, 6, 8 .

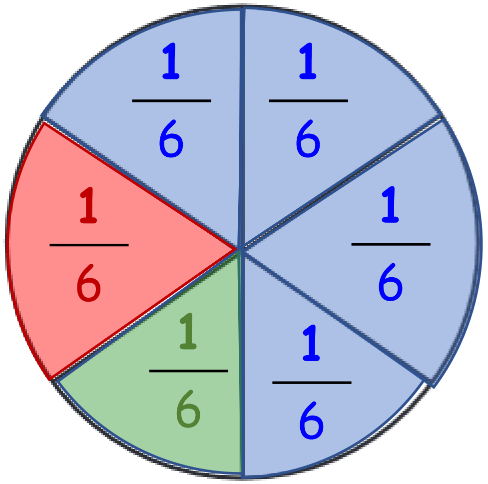
Η πιθανότητα να κερδίσει πόντο ο πρώτος παίκτης είναι $\frac{5}{9}$, ενώ

η πιθανότητα να κερδίσει πόντο ο δεύτερος παίκτης είναι $\frac{4}{9}$.

Εφόσον $\frac{5}{9} > \frac{4}{9}$, η πιθανότητα του πρώτου παίκτη να κερδίσει πόντο είναι μεγαλύτερη από αυτή του δεύτερου παίκτη.
Συνεπώς το παιχνίδι δεν είναι δίκαιο.

1ο Πρόβλημα

Τα παιδιά παίζουν με έναν τροχό χωρισμένο σε 6 ίσα μέρη. Κάθε μέρος είναι χρώματος μπλε, κόκκινου ή πράσινου. Η πιθανότητα να έρθει κόκκινο είναι $\frac{1}{6}$ και η πιθανότητα να έρθει μπλε χρώμα είναι $\frac{2}{3}$. Να χρωματίσεις τον τροχό.



Εφόσον η πιθανότητα να έρθει κόκκινο χρώμα είναι μία φορά στις 6 ή $\frac{1}{6}$, 1 από τα 6 ίσα μέρη του τροχού έχει χρώμα κόκκινο.

Η πιθανότητα να έρθει μπλε χρώμα είναι $\frac{2}{3} = \frac{2\chi2}{3\chi2} = \frac{4}{6}$, δηλαδή 4 φορές στις 6, οπότε 4 από τα ίσα μέρη του τροχού έχουν χρώμα μπλε.

Το υπόλοιπο μέρος του τροχού έχει χρώμα πράσινο.
Αυτό είναι 6 - 4 - 1 = 1 μέρος.

2ο Πρόβλημα

Χρώμα	Αριθμός κύβων
κόκκινο	4
γαλάζιο	3
μαύρο	2
κίτρινο	1
πράσινο	5

Ο Αντρέι έχει μια σακούλα με κύβους. Ο διπλανός πίνακας δείχνει πόσοι κύβοι από κάθε χρώμα βρίσκονται μέσα στη σακούλα. Σε ένα πείραμα τύχης, τραβά έναν κύβο με κλειστά μάτια, παρατηρεί το χρώμα του και τον επανατοποθετεί στη σακούλα.
Πόσους κύβους και ποιου χρώματος θα έπρεπε να προσθέσει ή να αφαιρέσει, ώστε:

α. η πιθανότητα να διαλέξει έναν κόκκινο κύβο να είναι $\frac{1}{5}$.

Η σακούλα περιέχει: 4 + 3 + 2+ 1 + 5 = 15 κύβους

Πιθανότητες κόκκινου = $\frac{4}{15}$

Για να γίνουν οι πιθανότητες του κόκκινου $\frac{1}{5} = \frac{1\chi3}{5\chi3} = \frac{3}{15}$ πρέπει να έχουμε τρεις κόκκινους κύβους από τους 15. Επομένως πρέπει να αφαιρέσουμε έναν κόκκινο κύβο και να βάλουμε στη θέση του έναν άλλο οποιουδήποτε χρώματος.

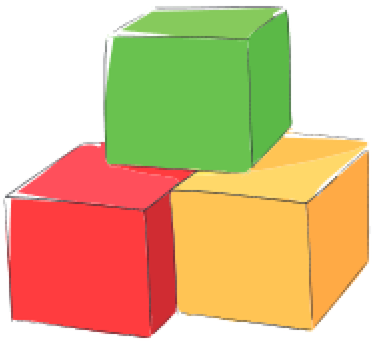
β. η τυχαία επιλογή οποιουδήποτε χρώματος κύβου να είναι το ίδιο πιθανή.

Αφού θέλουμε η τυχαία επιλογή οποιουδήποτε χρώματος κύβου να είναι το ίδιο πιθανή - και τα χρώματα είναι 5 - θα πρέπει το πλήθος των κύβων να είναι πολλαπλάσιο του 5 και να έχουμε κάθε φορά ίσο πλήθος κύβων από κάθε χρώμα.

Π.χ. Αν οι κύβοι παραμείνουν 15 , πρέπει να έχουμε 3 κύβους από κάθε χρώμα (5χ3=15).
Έτσι , για να έχουμε 3 κύβους από κάθε χρώμα , θ' αφαιρέσουμε έναν κόκκινο και δύο πράσινους , θα προσθέσουμε έναν μαύρο και δύο κίτρινους , ενώ οι γαλάζιοι θα παραμένουν ως έχουν.

Διερεύνηση – Επέκταση

Μέσα σε μια τσάντα βρίσκονται 3 πράσινοι, 5 κόκκινοι και 2 κίτρινοι κύβοι. Τραβάς έναν κύβο και βλέπεις τι χρώμα σου τυχαίνει. Μετά επανατοποθετείς τον κύβο στην τσάντα. Να κάνεις το πείραμα τύχης 20 φορές.



α. Μπορείς να προβλέψεις πόσες φορές στις 20 θα επιλεγεί το κάθε χρώμα;

Να καταγράψεις τις προβλέψεις σου στον πίνακα.

Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι: 3 + 5 + 2 = 10.

Πιθανότητες πράσινου = $\frac{3}{10} = \frac{6}{20}$

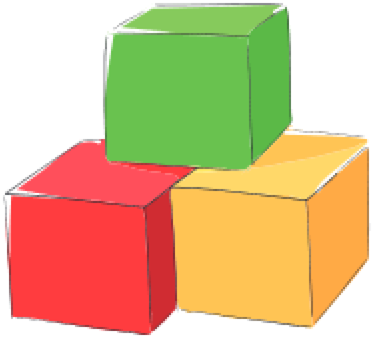
Πιθανότητες κόκκινου = $\frac{5}{10} = \frac{10}{20}$

Πιθανότητες κίτρινου = $\frac{2}{10} = \frac{4}{20}$

Επιλογή χρώματος	Πρόβλεψη	Συχνότητα εμφάνισης	
		Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα
πράσινο	6		
κόκκινο	10		
κίτρινο	4		

Διερεύνηση – Επέκταση

Μέσα σε μια τσάντα βρίσκονται 3 πράσινοι, 5 κόκκινοι και 2 κίτρινοι κύβοι. Τραβάς έναν κύβο και βλέπεις τι χρώμα σου τυχαίνει. Μετά επανατοποθετείς τον κύβο στην τσάντα. Να κάνεις το πείραμα τύχης 20 φορές.



α. Μπορείς να προβλέψεις πόσες φορές στις 20 θα επιλεγεί το κάθε χρώμα;

Να καταγράψεις τις προβλέψεις σου στον πίνακα.

β. Να κάνεις το πείραμα και να συμπληρώσεις στον ίδιο πίνακα τη συχνότητα εμφάνισης του κάθε χρώματος.

γ. Να συγκρίνεις τις προβλέψεις σου με τα αποτελέσματα του πειράματος τύχης.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ

Επιλογή χρώματος	Πρόβλεψη	Συχνότητα εμφάνισης	
		Καταμέτρηση με γραμμές	Συχνότητα
πράσινο	6	~~IIII~~	5
κόκκινο	10	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11
κίτρινο	4	IIII	4

Οι προβλέψεις μου είναι αρκετά κοντά , όχι όμως ίδιες , με τα αποτελέσματα του πειράματος τύχης.

δ. Να χρησιμοποιήσεις και τα αποτελέσματα των συμμαθητών και συμμαθητριών σου από το πείραμα, για να συμπληρώσεις στον παρακάτω πίνακα τη συχνότητα εμφάνισης του κόκκινου κύβου.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ

Επαναλήψεις του πειράματος τύχης	Συχνότητα εμφάνισης του κόκκινου κύβου	$\frac{\text{Συχνότητα εμφάνισης}}{\text{Επαναλήψεις πειράματος}}$
20	**8**	$\frac{8}{20} = 0,4$
40	**18**	$\frac{18}{40} = 0,45$
60	**32**	$\frac{32}{60} = 0,53$
80	**39**	$\frac{39}{80} = 0,49$

ε. Να υπολογίσεις με κλάσμα την πιθανότητα να τραβήξεις από την τσάντα ένα κόκκινο κύβο:

$\frac{5}{10} = 0,5$ .... Να τη συγκρίνεις με την τρίτη στήλη του πίνακα. Τι παρατηρείς;

Όσο αυξάνεται το πλήθος των δοκιμών του πειράματος τύχης, τόσο η τιμή του κλάσματος της τρίτης στήλης, πλησιάζει προς την τιμή της πιθανότητας δηλαδή το 0,5.

Μαθηματικά Ε' τάξης

Λύσεις ασκήσεων

Βιβλίου μαθητή και Τετραδίου εργασιών

Αποστόλης Αγγελόπουλος

24. Πιθανότητες