



Όνομα: _____

Ημερομηνία: ___ / ___ / ____



Θεωρία

Τι είναι τα πολλαπλάσια ;

Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού ονομάζονται οι αριθμοί που **προκύπτουν** όταν τον **πολλαπλασιάσουμε** με άλλους φυσικούς αριθμούς.

Πώς τα βρίσκουμε

Μπορούμε να βρούμε τα πολλαπλάσια κάθε αριθμού, **πολλαπλασιάζοντάς** τον αριθμό διαδοχικά με το **1 , 2, 3 , 4 , 5 ... 1.000 ...**

Τα πολλαπλάσια κάθε αριθμού είναι **άπειρα** , διότι άπειροι είναι και οι αριθμοί με τους οποίους μπορώ να τον πολλαπλασιάσω.

Παράδειγμα

$\Pi 3 = 0 , 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , 18 , \dots$

$\Pi 5 = 0 , 5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , \dots$

Ποια είναι τα κοινά πολλαπλάσια;

Κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών είναι τα πολλαπλάσια που **είναι ίδια** (κοινά) **σε όλους τους αριθμούς**.

Τα **κοινά πολλαπλάσια** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών είναι **άπειρα**.

Παράδειγμα

$\Pi 3 = 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36 \dots$

$\Pi 4 = 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 \dots$

Οι αριθμοί **0 , 12 , 24 , 36** είναι **πολλαπλάσια** και του **3** και του **4**.

Είναι τα **κοινά πολλαπλάσια (Κ.Π.)** του **3** και του **4**.

Επομένως:

$\text{Κ.Π. } (3,4) = 0 , 12 , 24 , 36 \dots 48 \dots$

Διαιρέτες

Λέγονται οι αριθμοί που διαιρούν ακριβώς τον αριθμό αυτό. (έχουμε τέλεια διαίρεση, υπόλοιπο=0)

Ας πάρουμε τον αριθμό 60. Ο πιο εύκολος τρόπος για να βρω τους διαιρέτες του, είναι να βρω ζευγάρια αριθμών που όταν πολλαπλασιαστούν μας δίνουν γινόμενο 60. Αυτοί είναι οι διαιρέτες του 60.

Παράδειγμα:

1	x	60	=	60
2	x	30	=	60
3	x	20	=	60
4	x	15	=	60
5	x	12	=	60
6	x	10	=	60

Διαιρέτες του 60 (για συντομία Δ 60) :
 Δ 60 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Κοινοί διαιρέτες

Κοινοί διαιρέτες δύο ή περισσότερων ακεραίων αριθμών λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που τους διαιρούν όλους ακριβώς.

Ας πάρουμε τους αριθμούς 12, 24 και 60 κι ας βρούμε τους διαιρέτες τους.

Παράδειγμα:

$$\Delta 12 = 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$\Delta 24 = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

$$\Delta 60 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$$

Βλέπουμε ότι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 6, 12 είναι **διαιρέτες και των τριών αριθμών**.

Αυτοί είναι οι **Κοινοί Διαιρέτες** του 12, του 24 και του 60. (για συντομία Κ.Δ.)

$$\text{Κ.Δ. (12, 24, 60)} = 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π)

Είναι το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια (ΟΧΙ το μηδέν).

$$\text{Π}3 = 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, \dots$$

$$\text{Π}4 = 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \dots$$

$$\text{Κ.Π. (3, 4)} = 0, 12, 24, 36, \dots, 48$$

$$\text{Ε.Κ.Π (3, 4)} = 12$$

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ)

Είναι ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες.

$$\Delta 12 = 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$\Delta 24 = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

$$\Delta 60 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$$

$$\text{Κ.Δ. (12, 24, 60)} = 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$\text{Μ.Κ.Δ (12, 24, 60)} = 12$$



Ασκήσεις

1. Βρίσκω τα πρώτα 5 πολλαπλάσια των αριθμών (εκτός του 0):

α) $\Pi_6 = \dots\dots\dots$

β) $\Pi_8 = \dots\dots\dots$

γ) $\Pi_{12} = \dots\dots\dots$

δ) $\Pi_{15} = \dots\dots\dots$

ε) $\Pi_{20} = \dots\dots\dots$

στ) $\Pi_{25} = \dots\dots\dots$

2. Βρίσκω τα πολλαπλάσια των αριθμών, εκτός από το 0, και τα συμπληρώνω στα κουτάκια. Μετά χρωματίζω όσα βλέπω ότι είναι κοινά και στους τρεις αριθμούς.

3									
6									
12									

4									
8									
16									

Κ.Π. (3 , 6 , 12) =

Κ.Π. (4 , 8 , 16) =

3. Βρίσκω τους διαιρέτες των αριθμών:

$\Delta_{48} = \dots\dots\dots$

$\Delta_{60} = \dots\dots\dots$

$\Delta_{80} = \dots\dots\dots$

$\Delta_{100} = \dots\dots\dots$

$\Delta_{120} = \dots\dots\dots$

4. Χρωματίζω τα κουτάκια με τους διαιρέτες των αριθμών:

Δ_{36}	2	3	4	5	6	9	12	18	22	36
Δ_{64}	2	3	4	6	8	12	16	22	32	64
Δ_{72}	2	3	4	6	12	18	24	36	38	72

5. Βρες το Ε.Κ.Π. (3 , 4 , 6)

α) Βρίσκω τα πολλαπλάσια των 3 , 4 , 6.

β) Βρίσκω τα κοινά πολλαπλάσια των 3 , 4 , 6.

γ) Βρίσκω το Ε.Κ.Π. (3 , 4 , 6).

$\Pi_3 = \dots\dots\dots$

$\Pi_4 = \dots\dots\dots$

$\Pi_6 = \dots\dots\dots$

Κ.Π (3 , 4 , 6) =

Ε.Κ.Π. (3 , 4 , 6) =

6. Βρες το ΜΚΔ (9,12,18).

- Γράψε όλους τους διαιρέτες του 12. $\Delta 12 = \dots\dots\dots$
- Γράψε όλους τους διαιρέτες του 18. $\Delta 18 = \dots\dots\dots$
- Γράψε όλους τους διαιρέτες του 9. $\Delta 9 = \dots\dots\dots$
- Βρες τους κοινούς διαιρέτες των 9,12,18 . Κ.Δ. (9,12,18) = $\dots\dots\dots$
- Βρες το ΜΚΔ (9,12,18). $\text{ΜΚΔ} (9,12,18) = \dots\dots\dots$

7. Οι μαθητές ενός σχολείου χωρίζονται σε ομάδες των 3 , των 4 και των 5 παιδιών και περισσεύουν πάντα 2 παιδιά. Πόσοι μπορεί να είναι , αν γνωρίζουμε πως είναι λιγότεροι από 100;

Απάντηση : _____

8. Ένας ανθοπώλης θέλει να φτιάξει ανθοδέσμες . Έχει 24 κόκκινα τριαντάφυλλα, 30 άσπρα και 42 ροζ. Αν πρέπει να φτιάξει ανθοδέσμες με τον ίδιο αριθμό λουλουδιών, πόσες ανθοδέσμες θα φτιάξει και πόσα λουλούδια από κάθε χρώμα θα πρέπει να βάλει χωρίς να του περισσέψει κανένα;



Απάντηση : _____

Απαντήσεις

1.

α) $\Pi_6 = 6, 12, 18, 24, 30$

β) $\Pi_8 = 8, 16, 24, 32, 40$

γ) $\Pi_{12} = 12, 24, 36, 48, 60$

δ) $\Pi_{15} = 15, 30, 45, 60, 75$

ε) $\Pi_{20} = 20, 40, 60, 80, 100$

στ) $\Pi_{25} = 25, 50, 75, 100, 125$

2.

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108

4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144

Κ.Π. (3, 6, 12) = 12, 24

Κ.Π. (4, 8, 16) = 16, 32

3.

$\Delta_{48} = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$

$\Delta_{60} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$

$\Delta_{80} = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80$

$\Delta_{100} = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$

$\Delta_{120} = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 40, 60, 120$

4.

Δ_{36}	2	3	4	5	6	9	12	18	22	36
Δ_{64}	2	3	4	6	8	12	16	22	32	64
Δ_{72}	2	3	4	6	12	18	24	36	38	72

5. $\Pi_3 = 3, 6, 9, \underline{12}, 15, 18, 21, \underline{24}, 27, 30, 33, \underline{36}, 39$

$\Pi_4 = 4, 8, \underline{12}, 16, 20, \underline{24}, 28, 32, \underline{36}, 40$

$\Pi_6 = 6, \underline{12}, 18, \underline{24}, 30, \underline{36}, 42, 48, 54, 60$

Κ.Π. (3, 4, 6) = 12, 24, 36

Ε.Κ.Π. (3, 4, 6) = 12

6.

- Γράψε όλους τους διαιρέτες του 12. $\Delta_{12} = \underline{1}, 2, \underline{3}, 4, 6, 12$
- Γράψε όλους τους διαιρέτες του 18. $\Delta_{18} = \underline{1}, 2, \underline{3}, 6, 9, 18$
- Γράψε όλους τους διαιρέτες του 9. $\Delta_9 = \underline{1}, \underline{3}, 9$
- Βρες τους κοινούς διαιρέτες των 9, 12, 18. Κ.Δ. (9, 12, 18) = 1, 3
- Βρες το ΜΚΔ (9, 12, 18). $\text{ΜΚΔ}(9, 12, 18) = 3$

7. Ο αριθμός των μαθητών, θα είναι το Ε.Κ.Π. του 3, 4, 5 αυξημένο κατά 2 (οι μαθητές που περισσεύουν)

$\Pi_3 = 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, \underline{60}$

$\Pi_4 = 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, \underline{60}, 64, 68, 72, \dots$

$\Pi_5 = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, \underline{60}, 65, 70, \dots$

Κ.Π. (3, 4, 5) = 0, 60

Ε.Κ.Π. (3, 4, 5) = 60

Επομένως οι μαθητές είναι $60 + 2 = 62$ μαθητές

8. Ο Μ.Κ.Δ. του 24, του 30 και του 42 θα μου δείξει πόσες όμοιες ανθοδέσμες θα φτιάξει.

Διαιρέτες του 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Διαιρέτες του 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

Διαιρέτες του 42: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42

Κοινοί διαιρέτες: 24, 30, 42 = 1, 2, 3, 6

Μ.Κ.Δ. (24, 30, 42) = 6 ανθοδέσμες θα φτιάξει και κάθε ανθοδέσμη θα έχει:

$24:6 = 4$ κόκκινα $30:6 = 5$ άσπρα $42:6 = 7$ ροζ