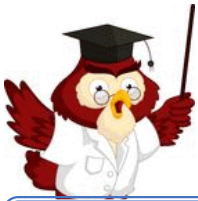


Όνομα: \_\_\_\_\_

Ημερομηνία: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_\_



Θεωρία

Κάποιοι αριθμοί, όταν διαιρεθούν, **δεν αφήνουν υπόλοιπο**. Οι διαιρέσεις αυτές λέγονται **τέλειες**.

Μερικοί αριθμοί, όταν διαιρεθούν, **αφήνουν υπόλοιπο**. Οι διαιρέσεις αυτές λέγονται **ατελείς**.

Παράδειγμα τέλειας:

Διαιρετέος (Δ) 12	4 Διαιρέτης (δ)
-12	3 Πηλίκο (π)
Υπόλοιπο (υ) 0	

Παράδειγμα ατελούς:

Διαιρετέος 14	4 Διαιρέτης
-12	3 Πηλίκο
Υπόλοιπο 2	

## ΔΟΚΙΜΗ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ

Σε κάθε διαίρεση ο διαιρετέος είναι ίσος με το γινόμενο του διαιρέτη επί το πηλίκο συν το υπόλοιπο. Αυτή είναι η δοκιμή (ή επαλήθευση) της διαίρεσης.

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \quad \text{ή} \quad \delta \cdot \pi + \upsilon = \Delta$$

Διαίρεση:  $14 : 4 = 3$  , υπ. 2

Δοκιμή:  $4 \cdot 3 + 2 = 14$



**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Το **υπόλοιπο** πρέπει να είναι πάντα **μικρότερο από το διαιρέτη**.

## Ιδιότητες της διαίρεσης

- ✓ Ένας αριθμός όταν διαιρείται με το 1 δίνει πηλίκο τον ίδιο τον αριθμό.  
 $457 : 1 = 457$      $12,35 : 1 = 12,35$
- ✓ και όταν διαιρείται με τον εαυτό του δίνει πηλίκο 1.  
 $457 : 457 = 1$
- ✓ σε μια διαίρεση ο διαιρέτης δεν μπορεί να είναι μηδέν  
 $457 : 0$     **ΔΕ ΓΙΝΕΤΑΙ**
- ✓ Αν ο διαιρετέος είναι 0 το πηλίκο είναι 0.  
 $0 : 25 = 0$
- ✓ Σε μια διαίρεση αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τους δύο όρους με τον ίδιο αριθμό το πηλίκο μένει ίδιο.

$$\begin{aligned} 12 : 4 &= 3 \\ (12 \cdot 2) : (4 \cdot 2) &= \\ 24 : 8 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 : 4 &= 3 \\ (12 : 2) : (4 : 2) &= \\ 6 : 2 &= 3 \end{aligned}$$

- ✓ Για να διαιρέσουμε άθροισμα με αριθμό, διαιρούμε κάθε προσθετέο με τον αριθμό και προσθέτουμε τα πηλίκα (επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση). Η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει και ως προς την αφαίρεση.

$$\begin{aligned} (12 + 6) : 3 &= \\ (12 : 3) + (6 : 3) &= \\ 4 + 2 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12 - 6) : 3 &= \\ (12 : 3) - (6 : 3) &= \\ 4 - 2 &= 2 \end{aligned}$$

## Διαίρεση με 10, 100, 1.000...

Για να διαιρέσω ένα φυσικό αριθμό με το 10, το 100, το 1.000..., βάζω υποδιαστολή ξεκινώντας από το τέλος του αριθμού μία, δύο ή τρεις... θέσεις αντίστοιχα προς τα αριστερά. Αν τελειώσουν τα ψηφία του αριθμού, βάζω μηδενικά.

$$\begin{aligned} 3.181 : 10 &= 318,1 \\ 456 : 100 &= 4,56 \\ 56.789 : 1.000 &= 56,789 \end{aligned}$$

Για να διαιρέσω ένα δεκαδικό αριθμό με το 10, το 100, το 1.000..., μεταφέρω την υποδιαστολή του αριθμού προς τα αριστερά μία, δύο ή τρεις... θέσεις αντίστοιχα. Αν τελειώσουν τα ψηφία του αριθμού, βάζω μηδενικά.

$$\begin{aligned} 569,3 : 10 &= 56,93 \\ 893,2 : 100 &= 8,932 \\ 1,9 : 1.000 &= 0,0019 \end{aligned}$$



**Ασκήσεις**

**1. Υπολογίζω με τον νου τα πηλίκα:**

α)  $120 : 3 = \dots\dots\dots$

β)  $200 : 25 = \dots\dots\dots$

γ)  $15.000 : 30 = \dots\dots\dots$

δ)  $18.000 : 60 = \dots\dots\dots$

ε)  $12 : 0 = \dots\dots\dots$

στ)  $120.800 : 2 = \dots\dots\dots$

ζ)  $540.000 : 27 = \dots\dots\dots$

η)  $2.400 : 4 = \dots\dots\dots$

θ)  $1.500.500 : 5 = \dots\dots\dots$

ι)  $0 : 12 = \dots\dots\dots$

**2. Υπολογίζω με τον νου τα πηλίκα:**

α)  $550 : 10 = \dots\dots\dots$

β)  $700 : 10 = \dots\dots\dots$

γ)  $37.000 : 100 = \dots\dots\dots$

δ)  $820.000 : 10.000 = \dots\dots\dots$

ε)  $900 : 30 = \dots\dots\dots$

στ)  $480.000 : 6.000 = \dots\dots\dots$

ζ)  $6.000.000 : 300.000 = \dots\dots\dots$

η)  $32.000.000 : 8.000 = \dots\dots\dots$

θ)  $6.000.000 : 150.000 = \dots\dots\dots$

ι)  $999.000 : 333.000 = \dots\dots\dots$

**3. Συμπλήρωσε τους αριθμούς που λείπουν, ώστε να ισχύουν τα παρακάτω πηλίκα:**

α.  $3.500 : \dots\dots\dots = 35$

β.  $21.000 : \dots\dots\dots = 70$

γ.  $18.000 : \dots\dots\dots = 18$

δ.  $4.200 : \dots\dots\dots = 7$

ε.  $34.000 : \dots\dots\dots = 3.400$

στ.  $90.000 : \dots\dots\dots = 45$

ζ.  $90.000 : \dots\dots\dots = 18$

η.  $20.000 : \dots\dots\dots = 50$

4. Υπολογίζω με τον νου το υπόλοιπο των διαιρέσεων:

Διαιρετέος	Διαιρέτης	Υπόλοιπο
805	10	
3.600	100	
18.600	6.000	
505.000	50.000	
3.008.300	30.000	
2.000.400	200.000	
80.000.800	4.000.000	

5. Συμπληρώστε τους αριθμούς που λείπουν από τον πίνακα :

$\Delta$ (διαιρετέος)	$\delta$ (διαιρέτης)	$\pi$ (πηλίκο)	$\upsilon$ (υπόλοιπο)	$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$
125	6	20	5	$125 = 6 \cdot 20 + 5$
78	5	15		
163		20		
	30	6	14	
76		9		

6. Να κάνεις κάθετα τις διαιρέσεις και να τις επαληθεύσεις:

α.  $1.152 : 7 =$

β.  $1.599 : 15 =$

γ.  $24.216 : 24 =$

7. Κάνω τις διαιρέσεις, όπως στο παράδειγμα:

$$487 : 8 =$$

$(400 : 8) + (80 : 8)$ , 7 υπόλοιπο =  
 $50 + 10 = 60$  πηλίκο 7 υπόλ.

$$863 : 20 =$$

$(\underline{\quad} : \underline{\quad}) + (\underline{\quad} : \underline{\quad})$ ,  $\underline{\quad}$  υπόλοιπο =  
 $\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$  πηλίκο  $\underline{\quad}$  υπόλ.

$$8.650 : 50 =$$

$(\underline{\quad} : \underline{\quad}) + (\underline{\quad} : \underline{\quad}) + (\underline{\quad} : \underline{\quad}) =$   
 $\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$  πηλίκο,  $\underline{\quad}$  υπ.

$$9.990 : 300 =$$

$(\underline{\quad} : \underline{\quad}) + (\underline{\quad} : \underline{\quad})$ ,  $\underline{\quad}$  υπόλοιπο =  
 $\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$  πηλίκο,  $\underline{\quad}$  υπόλ.



### Προβλήματα

8. Ποια είναι τα πιθανά υπόλοιπα μίας διαίρεσης φυσικών αριθμών, όταν ο διαιρέτης είναι το 8;

Τα πιθανά υπόλοιπα μπορεί να είναι : \_\_\_\_\_

9. Ο Νίκος θέλει να τοποθετήσει 160 αυτοκόλλητα στο άλμπουμ του. Αν σε κάθε σελίδα τοποθετεί 12 αυτοκόλλητα, πόσες σελίδες πρέπει να χρησιμοποιήσει και πόσα αυτοκόλλητα θα βάλει στην τελευταία σελίδα;



Απάντηση: \_\_\_\_\_

10. Μια ακαδημία ποδοσφαίρου αγόρασε μπάλες προς 23 € την καθεμία. Για να πληρώσει έδωσε 8 χαρτονομίσματα των 50 € και πήρε ρέστα 32 €.  
Πόσες μπάλες αγόρασε;

Απάντηση: \_\_\_\_\_

11. Αν σήμερα είναι Παρασκευή, τι μέρα θα είναι μετά από ένα χρόνο (365 ημέρες);

Απάντηση: \_\_\_\_\_

12. Ο Μάκης και ο Τάκης έχουν μαζί 360 τάπες ποδοσφαίρου. Αν ο Μάκης έχει διπλάσιες τάπες από τον Τάκη, πόσες τάπες έχει καθένας τους;

Απάντηση: \_\_\_\_\_

**Απαντήσεις**

**1.**

α) $120 : 3 = 40$
β) $200 : 25 = 8$
γ) $15.000 : 30 = 500$
δ) $18.000 : 60 = 300$
ε) $12 : 0 = 0$

στ) $120.800 : 2 = 60.400$
ζ) $540.000 : 27 = 20.000$
η) $2.400 : 4 = 600$
θ) $1.500.500 : 5 = 300.100$
ι) $0 : 12 = \Delta\text{ΕΝ ΓΙΝΕΤΑΙ}$

**2.**

α) $550 : 10 = 55$
β) $700 : 10 = 70$
γ) $37.000 : 100 = 370$
δ) $820.000 : 10.000 = 82$
ε) $900 : 30 = 30$

στ) $480.000 : 6.000 = 80$
ζ) $6.000.000 : 300.000 = 20$
η) $32.000.000 : 8.000 = 4.000$
θ) $6.000.000 : 150.000 = 40$
ι) $999.000 : 333.000 = 3$

**3.**

α.  $3.500 : 100 = 35$

β.  $21.000 : 300 = 70$

γ.  $18.000 : 1.000 = 18$

δ.  $4.200 : 600 = 7$

ε.  $34.000 : 10 = 3.400$

στ.  $90.000 : 2.000 = 45$

ζ.  $90.000 : 5.000 = 18$

η.  $20.000 : 400 = 50$

**4.**

Διαιρετέος	Διαιρέτης	Υπόλοιπο
805	10	5
3.600	100	0
18.600	6.000	600
505.000	50.000	5.000
3.008.300	30.000	8.300
2.000.400	200.000	400
80.000.800	4.000.000	800

5.

Δ (διααιρετέος)	δ (διαιρέτης)	π (πηλίκιο)	υ (υπόλοιπο)	$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$
125	6	20	5	$125 = 6 \cdot 20 + 5$
78	5	15	3	$78 = 5 \cdot 15 + 3$
163	8	20	3	$163 = 8 \cdot 20 + 3$
194	30	6	14	$194 = 30 \cdot 6 + 14$
76	8	9	4	$76 = 8 \cdot 9 + 4$

6. 1.152 : 72 =

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 5 \ 2 \ | \ 7 \\ - \ 7 \phantom{00} \\ \hline 4 \ 5 \phantom{00} \\ - \ 4 \ 2 \phantom{00} \\ \hline \phantom{00} 3 \ 2 \phantom{00} \\ - \ 2 \ 8 \phantom{00} \\ \hline \phantom{000} 4 \phantom{00} \end{array}$$

Δοκιμή:  $164 \times 7 = 1.148$   
 $1.148 + 4 = 1.152$

β. 1.590 : 15 =

$$\begin{array}{r} 1 \ 5 \ 9 \ 0 \ | \ 15 \\ - \ 1 \ 5 \phantom{00} \\ \hline \phantom{00} 0 \ 9 \phantom{00} \\ - \ 0 \ 0 \phantom{00} \\ \hline \phantom{000} 9 \ 9 \phantom{00} \\ - \ 9 \ 0 \phantom{00} \\ \hline \phantom{0000} 9 \phantom{00} \end{array}$$

Δοκιμή:  $106 \times 15 = 1.590$   
 $1.590 + 9 = 1.599$

γ. 24.216 : 24 =

$$\begin{array}{r} 2 \ 4 \ 2 \ 1 \ 6 \ | \ 24 \\ - \ 2 \ 4 \phantom{00} \\ \hline \phantom{000} 0 \ 2 \phantom{00} \\ - \ 0 \phantom{00} \\ \hline \phantom{0000} 2 \ 1 \phantom{00} \\ - \ 0 \phantom{00} \\ \hline \phantom{00000} 2 \ 1 \ 6 \phantom{00} \\ - \ 2 \ 1 \ 6 \phantom{00} \\ \hline \phantom{000000} 0 \phantom{00} \end{array}$$

Δοκιμή:  $1.009 \times 24 = 24.216$

7.

$863 : 20 =$   
 $(800 : 20) + (60 : 20), 3 \text{ υπόλοιπο} =$   
 $40 + 3 = 43 \text{ πηλίκιο } 3 \text{ υπόλ.}$

$8.650 : 50 =$   
 $(8.000 : 50) + (600 : 50) + (50 : 50) =$   
 $160 + 12 + 1 = 173 \text{ πηλίκιο, } 0 \text{ υπ.}$

$9.990 : 300 =$   
 $(9.000 : 300) + (900 : 300), 90 \text{ υπόλοιπο} =$   
 $30 + 3 = 33 \text{ πηλίκιο, } 90 \text{ υπόλ.}$



**8.** Τα πιθανά υπόλοιπα μπορεί να είναι : 0,1,2,3,4,5,6,7 (οι αριθμοί οι μικρότεροι του 8)

**9.** Ο Νίκος θέλει να τοποθετήσει 160 αυτοκόλλητα στο άλμπουμ του. Αν σε κάθε σελίδα τοποθετεί 12 αυτοκόλλητα, πόσες σελίδες πρέπει να χρησιμοποιήσει και πόσα αυτοκόλλητα θα βάλει στην τελευταία σελίδα;

$$160 : 12 = 13 , \text{ υπ.} 4$$

Επομένως θα χρησιμοποιήσει 13 σελίδες και στην τελευταία 4.

**10.** Η ακαδημία έδωσε στο ταμείο  $8 \times 50 = 400$  €. Εφόσον πήρε ρέστα 32 €, πλήρωσε για τις μπάλες  $400 - 32 = 368$  €. Διαιρώντας αυτό το ποσό με την τιμή της κάθε μπάλας βρίσκω πως αγόρασε  $368 : 23 = 16$  μπάλες.

**11.** Κάθε 7 ημέρες (1 εβδομάδα) έχουμε την ίδια μέρα. Διαιρώντας  $365:7$  βρίσκω πηλίκο 52 (52 εβδομάδες) και υπόλοιπο 1. Επομένως σε 52 εβδομάδες (364 ημέρες) θα είναι Παρασκευή και σε 365 ημέρες (1 μέρα μετά) θα είναι Σάββατο.

**12.** Εφόσον ο Μάκης έχει διπλάσιες τάπες από τον Τάκη, τα μερίδια είναι 3.

$$(2 \text{ του Μάκη}) + 1 \text{ (του Τάκη)} = 3.$$

Διαιρώντας το πλήθος των ταπών με τον αριθμό των μεριδίων βρίσκω πως ο Τάκης (1 μερίδιο) έχει  $360 : 3 = 120$  τάπες και ο Μάκης (2 μερίδια)  $120 \times 2 = 240$  τάπες.